

Courant induit par une onde incidente sur un conducteur rectiligne et filiforme situé au voisinage du sol

Yannick BÉNIGUEL
Docteur ès Sciences *

DEUXIÈME PARTIE CONDUCTEUR ENTERRÉ ET ISOLÉ CALCUL DANS LES DOMAINES FRÉQUENTIEL ET TEMPOREL

Analyse

Le problème du calcul du courant induit par une onde incidente sur un conducteur enterré, isolé et situé au voisinage du sol, est analysé.

La solution est recherchée dans le domaine fréquentiel sur un conducteur infini. Ceci permet d'éviter le calcul des intégrales de Sommerfeld en leur substituant des intégrales qui se calculent analytiquement. Le courant induit sur un conducteur de dimension finie s'obtient en ajoutant les courants réfléchis aux extrémités pour les différents ordres successifs de réflexion.

Mots clés : Courant induit, Onde électromagnétique, Antenne fil, Effet sol, Méthode domaine fréquence, Facteur réflexion, Antenne horizontale, Méthode analytique, Méthode domaine Temps.

CURRENT INDUCED BY AN INCIDENT WAVE ON A STRAIGHT WIRE. PART 2. INSULATED WIRE BURIED IN THE GROUND

Abstract

An analytical result for the current induced by a plane incident wave on a thin straight insulated wire buried in the ground and parallel to the interface is presented.

Two methods are presented to solve this problem in the frequency domain ; the first one uses the current on an infinite wire ; the current induced on a finite wire is obtained adding to the preceding result the reflected currents of different orders. The second uses the reflection coefficients of the transmission line theory. The results are compared with those obtained from another method in which the Sommerfeld integrals are numerically evaluated.

Key words : Induced current, Electromagnetic wave, Wire antenna, Ground effect, Frequency domain method, Reflection coefficient, Horizontal antenna, Analytical method, Time domain method.

Sommaire

1. Introduction.
2. Calcul de la composante tangentielle du champ électrique (problème de rayonnement).
3. Calcul de la composante tangentielle du champ magnétique (problème de rayonnement).
4. Prise en compte de l'excitation (problème de diffraction).
5. Calcul du courant induit (problème de diffraction).
6. Prise en compte des réflexions aux extrémités d'une antenne enterrée.
7. Solution dans le domaine temporel.
8. Résultats.
9. Conclusion.

Annexe.

Bibliographie (7 réf.).

1. INTRODUCTION

Cette étude fait suite à celle effectuée pour le calcul du courant induit sur un conducteur aérien situé au voisinage du sol [1]. Les difficultés rencontrées pour le calcul du courant induit sur un conducteur enterré sont de même nature et relatives à la prise en compte de l'effet du sol de façon exacte.

Parmi les publications effectuées sur ce sujet, nous citerons celle de King [6] qui, pour résoudre ce problème, utilise une formulation type ligne de transmission. La solution obtenue utilise les intégrales de Sommerfeld suivant la forme proposée par Baños [5]. Ces intégrales doivent être évaluées numériquement.

* Laboratoire Central de Télécommunications, 18-20, rue Grange-Dame-rose, B P. 40, F78141 Vélizy-Villacoublay.
Etude effectuée sous contrat Aérospatiale

Dans cet article, nous indiquons une méthode pour résoudre analytiquement ce problème. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux fournis par une méthode développée parallèlement où les intégrales de Sommerfeld sont évaluées numériquement.

La méthode employée est identique à celle utilisée dans le cas du conducteur aérien et comprend les étapes suivantes :

— calcul des caractéristiques du système pour un mode de propagation quelconque sur le conducteur. Ce travail a été effectué par Wait [2]. Il est repris au début de cet article pour une meilleure compréhension du lecteur ;

— sommation de toutes les composantes modales . calcul du courant induit sur un conducteur infini situé dans un milieu dispersif ;

— prise en compte des réflexions aux extrémités : courant induit sur un conducteur fini situé dans un milieu dispersif.

La solution temporelle, dans le cas d'un conducteur infini, s'obtient par transformation inverse de Laplace du résultat fréquentiel obtenu. Le cas d'une excitation impulsionnelle est ensuite envisagé. Le courant induit par ce signal s'exprime par un produit de convolution de la solution temporelle précédemment obtenue par l'expression temporelle du champ incident sur le conducteur correspondant au signal d'excitation.

2. CALCUL DE LA COMPOSANTE TANGENTIELLE DU CHAMP ÉLECTRIQUE (PROBLÈME DE RAYONNEMENT)

Le calcul de la composante tangentielle du champ électrique s'effectue en utilisant la même procédure que celle employée dans le cas d'un câble au-dessus du sol.

On considère un conducteur cylindrique filiforme infini, parallèle à l'interface air-sol et parcouru par un courant $I = I_0 e^{-\Gamma z}$ avec $\Gamma = j\beta$. La constante β est la constante de propagation. Elle est supposée quelconque.

Les calculs effectués dans l'étude relative au conducteur aérien ont permis d'obtenir l'expression de la composante tangentielle du champ électrique, suivante :

$$(1) \quad E_z = A e^{-\Gamma z} (k^2 + \Gamma^2) \times K_0(j(k^2 + \Gamma^2)^{1/2} \rho) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\lambda) e^{-u(h+x)} \frac{e^{-\lambda y}}{u} d\lambda,$$

avec :

$$R(\lambda) = \frac{\lambda^2 \beta^2 (1-K)^2 + (\omega \varepsilon_1 u - \omega \varepsilon_0 u_0 K)(\omega \mu_0 u + \omega \mu_0 u_0 K)}{-\lambda^2 \beta^2 (1-K)^2 + (\omega \varepsilon_1 u + \omega \varepsilon_0 u_0 K)(\omega \mu_0 u + \omega \mu_0 u_0 K)},$$

et :

$$K = \frac{k^2 + \Gamma^2}{k_0^2 + \Gamma^2}, \quad u = (\lambda^2 + \beta^2 - k^2)^{1/2};$$

$$u_0 = (\lambda^2 + \beta^2 - k_0^2)^{1/2}.$$

Dans ces équations, les constantes de propagation k ont été permutées, par rapport au cas du conducteur aérien, la source de courant étant située cette fois dans le sol.

$$\text{Sol : } k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_1 - j \mu \sigma \omega.$$

$$\text{Air : } k_0^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_0.$$

Les calculs feront apparaître de même la constante de propagation k_c de la gaine diélectrique entourant le conducteur.

$$k_c^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_c, \quad \varepsilon_c : \text{permittivité de la gaine.}$$

A est une constante fonction du courant circulant sur le conducteur.

L'équation (1) permet d'obtenir la valeur de la composante tangentielle du champ électrique en tout point dans le sol.

A l'intérieur de la gaine diélectrique entourant le conducteur, le champ peut se calculer simplement en utilisant des coordonnées cylindriques. La solution doit satisfaire à la condition de continuité à l'interface sol-gaine et doit s'annuler à la surface du conducteur. De plus, la géométrie étant cylindrique, la solution s'exprime à l'aide d'une combinaison de fonctions de Bessel.

A l'intérieur de la gaine diélectrique, la composante E_{az} est par conséquent de la forme :

$$(2) \quad E_{az} = B e^{-\Gamma z} (k_c^2 + \Gamma^2) \times \left(J_0(v_c \rho) - \frac{J_0(v_c a)}{Y_0(v_c a)} Y_0(v_c \rho) \right),$$

avec :

$$v_c = (k_c^2 + \Gamma^2)^{1/2}.$$

ρ est la distance du point considéré au centre du conducteur. $a < \rho < b$ (a : rayon du conducteur, b : rayon de la gaine diélectrique).

Cette solution satisfait à la condition de continuité à la surface du conducteur.

$$E_{az}(a, \Phi, z) = 0.$$

3. CALCUL DE LA COMPOSANTE TANGENTIELLE DU CHAMP MAGNÉTIQUE (PROBLÈME DE RAYONNEMENT)

Les champs électrique et magnétique se déduisent des vecteurs de Hertz, de type électrique $\vec{\Pi}$ et magné-

tique $\vec{\Pi}^*$ par les relations :

$$(3) \quad \vec{E} = \nabla \times \nabla \times \vec{\Pi} - \mu \nabla \times \frac{\partial \vec{\Pi}^*}{\partial t},$$

$$(4) \quad \vec{H} = \varepsilon \nabla \times \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t} + \nabla \times \nabla \times \vec{\Pi}^*.$$

Les composantes E_z et H_ϕ en coordonnées cylindriques ont pour valeur :

$$E_z = (k^2 + \Gamma^2) \Pi,$$

$$H_\phi = \frac{\partial^2 \Pi^*}{\rho \partial \Phi \partial z} + \frac{k^2}{j \omega \mu} \frac{\partial \Pi}{\partial \rho}.$$

Les vecteurs de Hertz obtenus ne dépendent pas de Φ . Par conséquent :

$$(5) \quad H_\phi = \frac{k^2}{j \omega \mu} \frac{\partial \Pi}{\partial \rho}.$$

Les équations (1) et (2) fournissent l'expression du vecteur de Hertz électrique :

$$(6) \quad h \geq \rho \geq b, \quad \Pi = A e^{-\Gamma z} \left\{ K_0(j(k^2 + \Gamma^2) \rho) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u} R(\lambda) e^{-u(h+x)} e^{-j\lambda y} d\lambda \right\},$$

$$(7) \quad b \geq \rho \geq a, \quad \Pi = B e^{-\Gamma z} \left(J_0(v_c \rho) - \frac{J_0(v_c a)}{Y_0(v_c a)} Y_0(v_c \rho) \right).$$

On en déduit l'expression de H_ϕ :

$$(8) \quad h \geq \rho \geq b, \quad H_\phi = -A e^{-\Gamma z} (k^2 + \Gamma^2)^{1/2} \times K_1(j(k^2 + \Gamma^2)^{1/2} \rho) \omega \varepsilon,$$

$$(9) \quad b \geq \rho \geq a, \quad H_\phi = -j \varepsilon_c \omega v_c B \left(J'_0(v_c \rho) - \frac{J_0(v_c a)}{Y_0(v_c a)} Y'_0(v_c \rho) \right) e^{-\Gamma z}.$$

En se plaçant dans le plan $y = 0$ et pour la valeur $x = h$, le coefficient de l'exponentielle intervenant dans le terme intégral est alors $-2uh$.

En prenant par hypothèse $\rho \ll h$, il est légitime d'ignorer ce terme intégral dans l'expression de H_ϕ .

L'expression (8) sera utilisée dans la suite à la surface de la gaine diélectrique pour laquelle $\rho = b$. L'épaisseur de celle-ci est supposée beaucoup plus faible que la profondeur $x = h$ à laquelle est situé le conducteur.

4. PRISE EN COMPTE DE L'EXCITATION (PROBLÈME DE DIFFRACTION)

En présence d'une excitation électromagnétique monochromatique, le champ électrique à la surface

de la gaine diélectrique est la résultante des champs de l'onde incidente et de l'onde diffractée par le conducteur.

$$(10) \quad E_z^T = E_z + E_z^i.$$

La composante E_z est fournie par l'expression (1).

La composante E_z^i (cf. Annexe I) a pour valeur :

$$E_z^i(h, 0, z) = E e^{-jk h \cos \theta_1} e^{-jk z \sin \theta_1 \cos \psi} = E_0 e^{-jk_z z},$$

avec :

$$k_z = k_0 \sin \theta_0 \cos \psi = k \sin \theta_1 \cos \psi,$$

$$E_z^T = A e^{-\Gamma z} (k^2 + \Gamma^2) K_0(p) \times \left\{ 1 + \frac{1}{2 K_0(p)} \int_{-\infty}^{\infty} R(\lambda) e^{-u(h+x)} \frac{e^{-j\lambda y}}{u} d\lambda \right\} + E_0 e^{-jk_z z},$$

avec :

$$(11) \quad p = j(k^2 + \Gamma^2)^{1/2} \rho.$$

En posant :

$$(12) \quad \Delta = \frac{1}{2 K_0(p)} \int_{-\infty}^{\infty} R(\lambda) e^{-u(h+x)} \frac{e^{-j\lambda y}}{u} d\lambda,$$

$$(13) \quad E_z^T = A e^{-\Gamma z} (k^2 + \Gamma^2) K_0(p) (1 + \Delta) + E_0 e^{-jk_z z}.$$

Cette expression doit satisfaire à la condition de continuité à la surface de la gaine diélectrique. La constante de propagation est par conséquent :

$$\Gamma = j k_z,$$

$$k^2 + \Gamma^2 = k^2 - k_z^2 = k^2 (1 - (\sin \theta_1 \cos \psi)^2) = k^2 C^2,$$

(14)

$$E_z^T = A e^{-\Gamma z} k^2 C^2 K_0(p) \left(1 + \Delta + \frac{E_0}{A k^2 C^2 K_0(p)} \right).$$

La composante tangentielle H_ϕ du champ magnétique est fournie par la même expression que précédemment :

$$H_\phi = -A e^{-\Gamma z} (k^2 + \Gamma^2)^{1/2} K_1(j(k^2 + \Gamma^2)^{1/2} \rho) \omega \varepsilon.$$

En prenant les rapports des composantes E_z et H_ϕ pour $\rho = b$ pour les deux expressions $\rho > b$ et $b > \rho > a$, il vient :

$$(15) \quad \frac{A k^2 C^2 K_0(j k C b) (1 + \Delta + \alpha/A) e^{-\Gamma z}}{-A e^{-\Gamma z} k C K_1(j k C b) \omega \varepsilon} = \frac{B v_c^2 \left(J_0(v_c \rho) - \frac{J_0(v_c a)}{Y_0(v_c a)} Y_0(v_c \rho) \right) e^{-\Gamma z}}{-j \omega \varepsilon_c v_c B \left(J'_0(v_c \rho) - \frac{J_0(v_c a)}{Y_0(v_c a)} Y'_0(v_c \rho) \right) e^{-\Gamma z}},$$

avec :

$$(16) \quad \alpha = \frac{E_0}{(k^2 + \Gamma^2) K_0(p)} = \frac{E_0}{k^2 C^2 K_0(p)}.$$

Il vient :

$$1 + \Delta + \frac{\alpha}{A} = \frac{v_c \varepsilon}{j \varepsilon_c k C} \times \frac{(Y_0(v_c a) J_0(v_c b) - J_0(v_c a) Y_0(v_c b)) K_1(p)}{(J_0(v_c a) Y_1(v_c b) - Y_0(v_c a) J_1(v_c b)) K_0(p)}.$$

En remarquant que $v_c a$ et $v_c b$ sont très inférieurs à 1, on peut remplacer les fonctions de Bessel par leurs approximations pour de faibles arguments :

$$1 + \Delta + \frac{\alpha}{A} = \frac{v_c \varepsilon}{j \varepsilon_c k C} v_c b \log_e \frac{b K_1(p)}{a K_0(p)},$$

$$(17) \quad A = \alpha \left(\frac{(v_c b)^2}{k_c^2/k^2} \log_e \frac{b K_1(p)}{a p K_0(p)} - (1 + \Delta) \right)^{-1}.$$

La constante A obtenue est l'amplitude du champ induit. Elle s'exprime en fonction de l'amplitude du champ incident E_0 .

5. CALCUL DU COURANT INDUIT (PROBLÈME DE DIFFRACTION)

5.1. Expression des paramètres d'impédance et d'admittance.

Le courant induit peut s'obtenir en appliquant le théorème d'Ampère à la surface de la gaine diélectrique :

$$I = (2\pi \rho H_{\Phi})_{\rho=b}.$$

Il vient :

$$(18) \quad I = -2 \Pi b k C K_1(p) \omega \varepsilon \frac{E_0}{k^2 C^2 K_0(p)} \times \frac{1}{\left(\frac{(v_c b)^2}{k_c^2/k^2} \log_e \frac{b K_1(p)}{a p K_0(p)} - (1 + \Delta) \right)} e^{-kz}.$$

La fonction $K_1(p)$ peut de même être remplacée par son approximation pour argument faible.

$$(19) \quad K_1(p) \approx 1/p.$$

Il vient :

$$(20) \quad I = +j \frac{2\pi}{\omega \mu} \frac{E_z^i}{C^2 K_0(p)} \times \frac{1}{\left(\frac{(v_c b)^2}{k_c^2/k^2} \log_e \frac{b K_1(p)}{a p K_0(p)} - (1 + \Delta) \right)}.$$

Le courant peut se mettre sous la forme :

$$I = E_z^i / Z_T,$$

avec :

$$Z_T = -j \frac{\omega \mu k^2 C^2}{2\pi k_c^2} (v_c b)^2 \log_e \frac{b K_1(p)}{a p} + j \frac{\omega \mu}{2\pi} C^2 K_0(p) (1 + \Delta).$$

Remplaçant $K_1(p)$ par son approximation et p par sa valeur, il vient :

$$Z_T = j \frac{\omega \mu}{2\pi} \left(\frac{\Gamma^2}{k_c^2} + 1 \right) \log_e \frac{b}{a} + j \frac{\omega \mu}{2\pi} C^2 K_0(p) (1 + \Delta),$$

$$(21) \quad Z_T = + \frac{\beta^2}{j 2\pi \omega \varepsilon_c} \log_e \frac{b}{a} + j \frac{\omega \mu}{2\pi} \left(\log_e \frac{b}{a} + C^2 K_0(p) (1 + \Delta) \right),$$

sachant :

$$\Gamma = j k_z,$$

$$\Gamma = j k_0 \sin \theta_0 \cos \psi = j \beta, \quad \Gamma^2 = -\beta^2,$$

$$(22) \quad Z_T = \frac{\beta^2}{j 2\pi \omega \varepsilon_c} \left[\log_e \frac{b}{a} + j \frac{\omega \mu}{2\pi} \log_e \frac{b}{a} + C^2 K_0(p) + \frac{C^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u} R(\lambda) e^{-u(h+x)} e^{-j\lambda y} d\lambda \right].$$

Le calcul de $R(\lambda)$ peut s'effectuer en simplifiant l'expression obtenue si l'on remarque que $|\Gamma|$ et $|k_0| \ll |k|$. L'expression de $R(\lambda)$ se simplifie alors et est égale à :

$$(23) \quad R(\lambda) = \frac{u - \lambda}{u + \lambda}.$$

Il est alors possible de calculer analytiquement l'intégrale suivante [3] à la surface de la gaine diélectrique ($x = h, y = b$).

$$(24) \quad \int \frac{u - \lambda}{u + \lambda} \frac{e^{-2uh}}{u} d\lambda = -\frac{4}{\alpha^2} (1 + \alpha) e^{-\alpha} + 4 \left(\frac{1}{\alpha} K_1(\alpha) + K_0(\alpha) \right) - 2 K_0(\alpha),$$

$$= 2 T(\alpha).$$

Il vient :

$$(25) \quad Z_T = \frac{\beta^2}{j 2\pi \omega \varepsilon_c} \log_e \frac{b}{a} + j \frac{\omega \mu}{2\pi} \left(\log_e \frac{b}{a} + C^2 K_0(p) - \frac{2 C^2}{\alpha^2} (1 + \alpha) e^{-\alpha} + \frac{2}{\alpha} C^2 K_1(\alpha) + C^2 K_0(\alpha) \right).$$

La fonction $T(\alpha)$ admet par rapport à α le développement :

$$T(\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{2\alpha}{3} + 0(\alpha^2),$$

$$(26) \quad Z_T \approx \frac{\beta^2}{j 2\pi \omega \varepsilon_c} \log_e \frac{b}{a} + j \frac{\omega \mu}{2\pi} \left(\log_e \frac{b}{a} + C^2 \left(K_0(p) + \frac{1}{2} - \frac{2\alpha}{3} \right) \right).$$

En toute rigueur, il faut rajouter à cette expression le terme traduisant les pertes ohmiques dans le conducteur, dont la valeur est :

$$(27) \quad \frac{1}{2\pi a} \left(j \frac{\mu \omega}{\sigma} \right)^{1/2} \frac{I_0(j k_{cu} a)}{I_1(j k_{cu} a)}.$$

Il vient finalement :

$$(28) \quad Z_T = \frac{\beta^2}{j 2\pi \omega \varepsilon_c} \log_e \frac{b}{a} + j \frac{\omega \mu}{2\pi} \left(\log_e \frac{b}{a} + C^2 \left(K_0(p) + \frac{1}{2} - \frac{2\alpha}{3} \right) - j \frac{1}{k_{cu} a} \frac{I_0(j k_{cu} a)}{I_1(j k_{cu} a)} \right),$$

$$(35) \quad E_z^a + \frac{\partial U}{\partial z} = E_c + \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Le potentiel dans le sol U s'exprime à l'aide du vecteur de Hertz par la relation :

$$(36) \quad U = -\nabla \cdot \vec{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

En reprenant les calculs effectués aux paragraphes précédents, on obtient la relation suivante entre le courant sur le conducteur et le vecteur de Hertz :

$$(37) \quad I = j \frac{2\pi\omega\varepsilon}{K_0(\rho)(1+\Delta)} \Pi = \frac{-k^2}{j \frac{\omega\mu}{2\pi} (K_0(\rho) + T(\alpha))} \Pi = Y_g \Pi.$$

On en déduit :

$$(38) \quad U = -Y_g^{-1} \frac{\partial I}{\partial z}.$$

6.1.1. Conducteur entouré d'une gaine diélectrique.

La composante tangentielle du champ électrique rayonné a été calculée au paragraphe 5.1.

$$(39) \quad E_c = ZI - Y_i^{-1} \frac{\partial^2 I}{\partial z^2}.$$

On en déduit :

$$(40) \quad E_z^a = ZI - Y_i^{-1} \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} - Y_g^{-1} \frac{\partial^2 I}{\partial z^2},$$

où Z et Y_i sont définis au paragraphe 5.2. (éq. (31) et (32)).

6.1.2. Conducteur nu.

Le terme Z se simplifie car $\log_e b/a = 0$, et le terme Y_i^{-1} s'annule. On obtient par conséquent :

$$(41) \quad E_z^a = ZI - Y_g^{-1} \frac{\partial^2 I}{\partial z^2}.$$

6.1.3. Solution dans le domaine fréquentiel.

La solution peut s'obtenir à partir des équations du premier ordre :

$$(42) \quad \frac{\partial(V-U)}{\partial z} = -ZI + E_z^a,$$

$$(43) \quad \frac{\partial I}{\partial z} = -Y(V-U),$$

$$(44) \quad Y^{-1} = Y_i^{-1} + Y_g^{-1},$$

dont la solution est :

$$(45) \quad I = \frac{1}{2Z_c} \left(\int_0^z E_z^a(v) e^{\gamma v} dv + B \right) e^{-\gamma z} - \frac{1}{2Z_c} \left(\int_z^l E_z^a(v) e^{-\gamma v} dv + D \right) e^{\gamma z}.$$

Les constantes B et D sont déterminées par les conditions aux limites.

6.2. Méthode utilisant les facteurs de réflexion introduits par Hallén [4].

Les fonctions ψ intervenant pour la réflexion s'expriment de la même manière que dans le cas d'une antenne située au-dessus du sol, exceptée la fonction l .

Dans ce cas, la constante de propagation k dans le milieu étant complexe, il vient :

$$(46) \quad l(kz) = \int_{kz}^{\infty} \frac{e^{-j(\xi - kz)}}{\xi} d\xi \\ = e^{jkz} \int_{jkz}^{j\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = e^{jkz} E_1(jkz).$$

E_1 est la fonction exponentielle intégrale d'argument complexe.

Le courant sur le conducteur s'obtient à l'aide de la même formule que dans le cas d'un conducteur aérien, avec dans ce cas une constante de propagation k complexe. La procédure a été développée dans l'étude d'une antenne située au-dessus de l'interface [1].

$$(47) \quad I = -\frac{E_z^a}{jZ_c} \frac{\gamma}{\gamma^2 - k_z^2} \times \\ \left(1 - \frac{1}{\psi_1(0)} e^{-\gamma l} (\psi_1(\gamma(l+z)) e^{-\gamma z} + \psi_1(\gamma(l-z)) e^{\gamma z}) + \right. \\ \left. \frac{\psi_1(2\gamma l) e^{-3\gamma l}}{\psi_1(0) (\psi_\infty(0) + \psi_\infty(2\gamma l) e^{-2\gamma l})} (\psi_\infty(\gamma(l+z)) e^{-\gamma z} + \right. \\ \left. \psi_\infty(\gamma(l-z)) e^{\gamma z}) \right),$$

Z_c et γ sont relatifs suivant le cas à la présence ou à l'absence de gaine.

7. SOLUTION DANS LE DOMAINE TEMPOREL

Nous nous intéressons au calcul du courant induit sur un conducteur infini dont la valeur en présence ou en l'absence de gaine diélectrique, ainsi qu'il a été indiqué au paragraphe 5.2., est peu différente de :

$$(48) \quad I(\omega) = E_z^a / Z.$$

L'expression de Z ne se prête pas sous forme analytique à une transformation inverse de Laplace. Il est par contre possible de l'approximer de façon tout à fait correcte par une forme rationnelle en p facilement inversible et en utilisant l'approximation :

$$(49) \quad Z = Z_0 \frac{\tau_1 p}{1 + \tau_2 p}.$$

On en déduit :

$$(50) \quad I(\omega) = \frac{E_z^a}{Z_0} \frac{1 + \tau_2 p}{\tau_1 p},$$

et l'expression temporelle correspondante :

$$I(t) = \frac{1}{Z_0 \tau_1} \int_0^t E_z^a(\tau) d\tau + \frac{\tau_2}{Z_0 \tau_1} E_z^a(t).$$

Cette expression utilise la valeur de la composante tangentielle du champ transmis sur le conducteur dont l'expression est donnée en annexe II.

8. RÉSULTATS

8.1. Domaine fréquentiel.

8.1.1. $I(\omega)$ à z donné.

Les deux courbes tracées à la figure 1 représentent le module du courant induit sur une antenne de 100 m de long dans les deux cas où elle possède une gaine diélectrique et où elle n'en possède pas.

La courbe du courant induit sur un conducteur nu (signe *) présente un spectre plus étendu en basses fréquences que celle du conducteur isolé (signe =). Le courant induit sur un conducteur nu est par ailleurs plus faible dans une petite plage de fréquences moyennes.

Il n'existe qu'une résonance ($\lambda/2$) et non pas une série de résonances comme dans le cas du conducteur situé au-dessus de l'interface dont le comportement s'apparente plus à celui d'une ligne de transmission.

8.1.2. $I(z)$ à ω donné.

Les simulations ont été effectuées pour plusieurs fréquences réparties entre 0 et 10^7 Hz, pour différentes valeurs du rapport l/λ et dans les deux cas : présence de gaine ou absence de gaine.

Ces simulations permettent de comparer trois résultats :

- ceux fournis par la méthode des lignes de transmission (signe *);
- ceux utilisant les facteurs de réflexion introduits par Hallén (signe =);
- ceux fournis par une méthode numérique (signe •).

Les résultats obtenus par la méthode numérique utilisent le calcul des intégrales de Sommerfeld, suivant la méthode indiquée par Baños [5] (*).

La figure 2 représente le cas d'une antenne isolée de 200 m en circuit ouvert à chacune de ses extrémités. Les trois résultats sont quasiment confondus.

Les figures 3 et 4 sont relatives à un conducteur nu pour une antenne relativement courte ($l/\lambda = 1,34$) puis relativement longue (6,71).

La méthode de lignes de transmission présente de substantiels avantages. Elle est facile à mettre en œuvre et permet par ailleurs de considérer une impédance de charge quelconque.

(*) Cette méthode a été développée au LCT par M^{me} Louet.

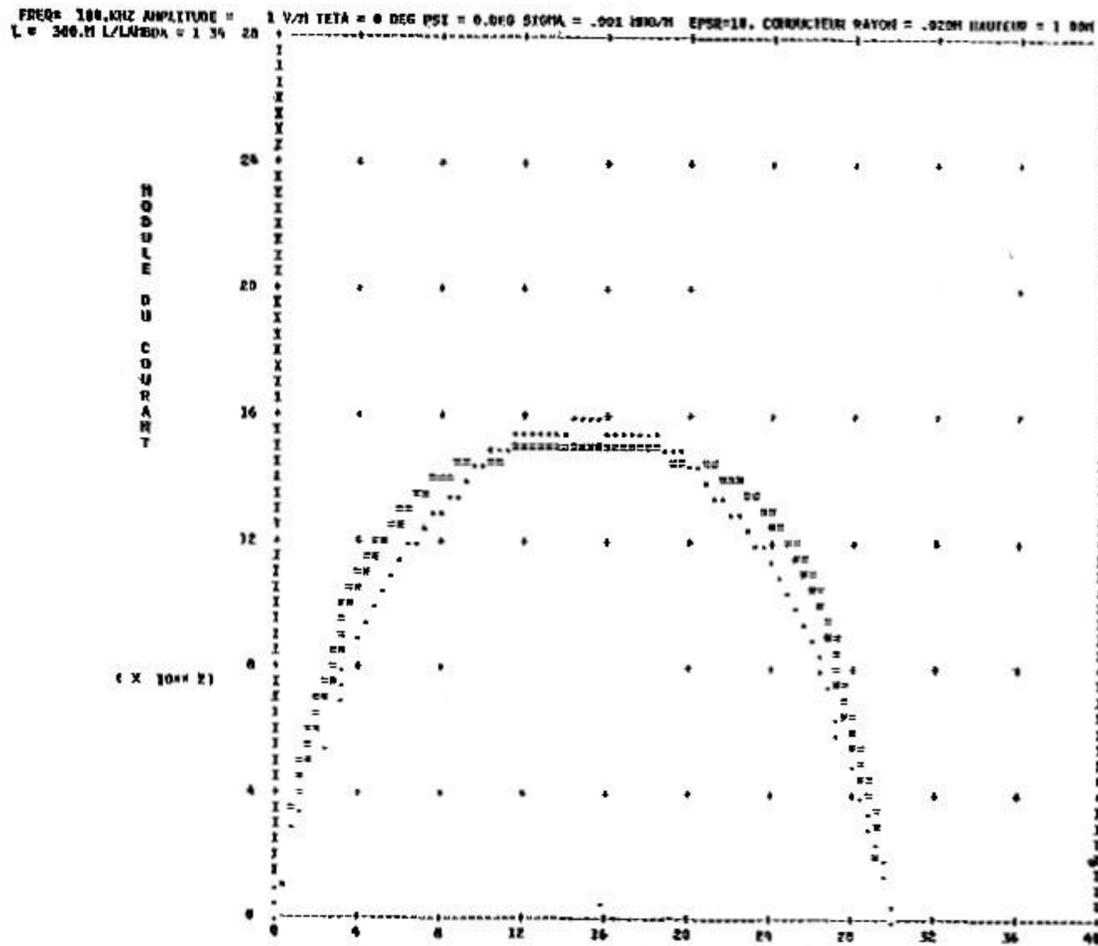


FIG. 3. — Courant induit en fonction de l'abscisse sur le conducteur.

- . . . Méthode numérique Numerical method.
- — — Méthode de Hallén Hallén method.
- * * * Méthode « lignes de transmission » Transmission line method.

Induced current versus position along the wire.

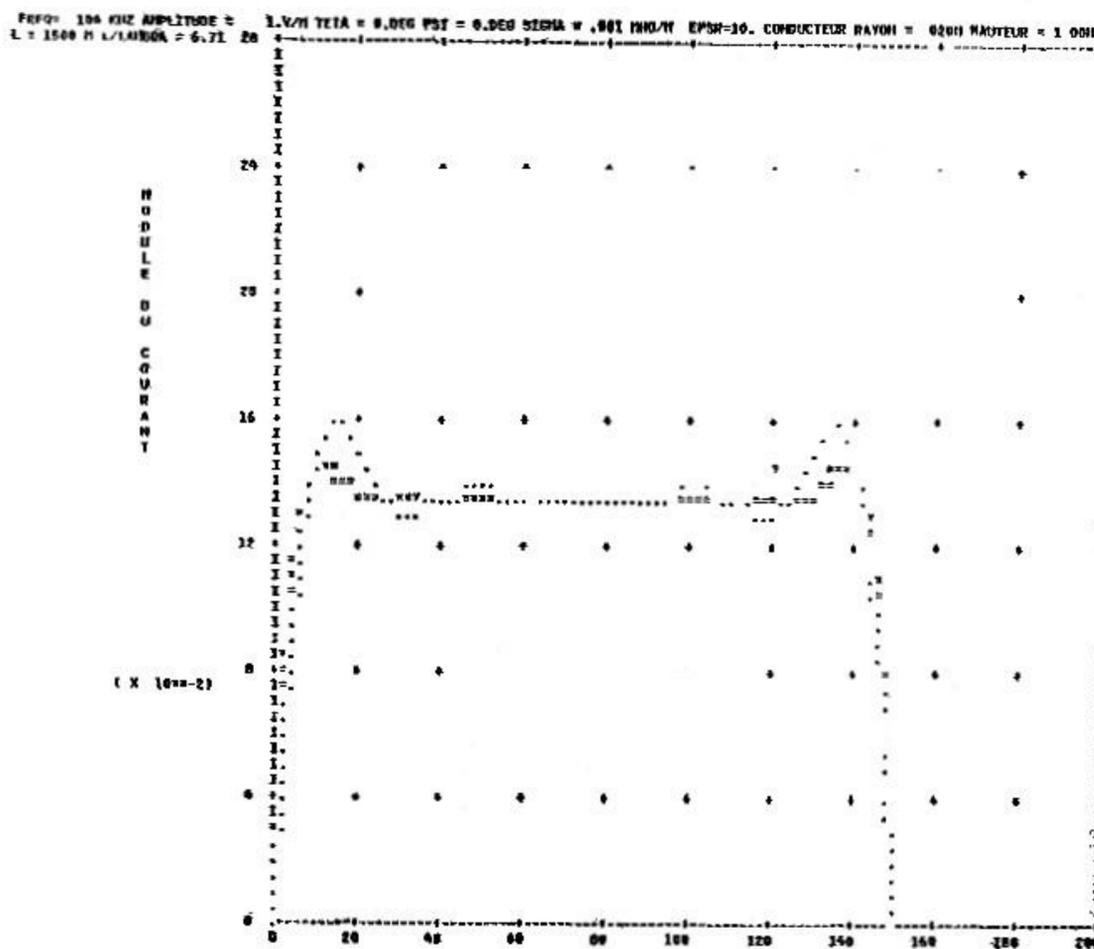


FIG. 4. — Courant induit en fonction de l'abscisse sur le conducteur.

- . . . Méthode numérique Numerical method.
- — — Méthode de Hallén Hallén method.
- * * * Méthode « lignes de transmission » Transmission line method.

Induced current versus position along the wire.

8.2. Domaine temporel.

Les figures 5 et 6 représentent la variation de la composante tangentielle à la profondeur $z = 0$

pour différents angles d'incidence et à la profondeur $z = 1$ m pour une incidence nulle, en fonction du temps. L'angle d'incidence est évalué par rapport à la normale au plan.

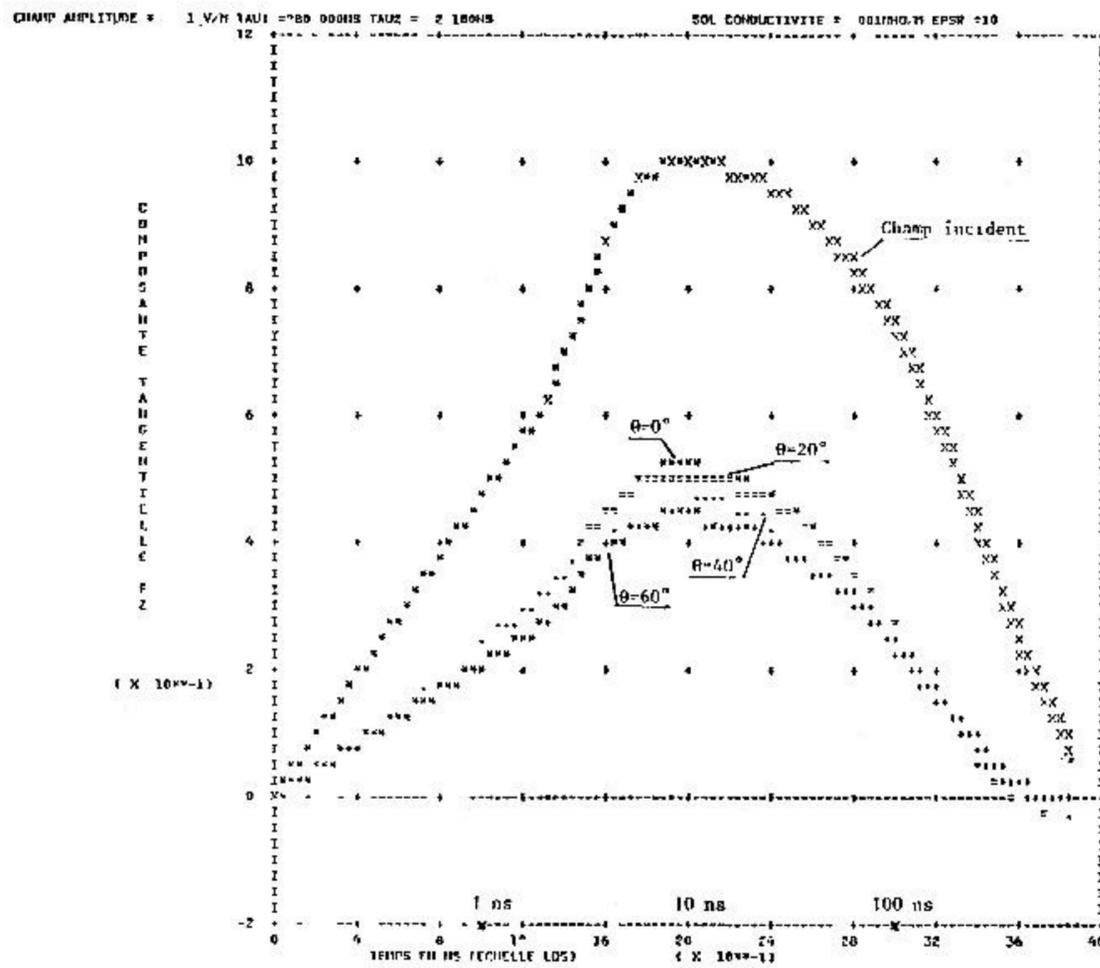


FIG. 5. — Composante tangentielle du champ transmis dans le sol à la profondeur $z = 0$ m en fonction du temps.
Tangential component of the transmitted field at depth $z = 0$ m versus time.

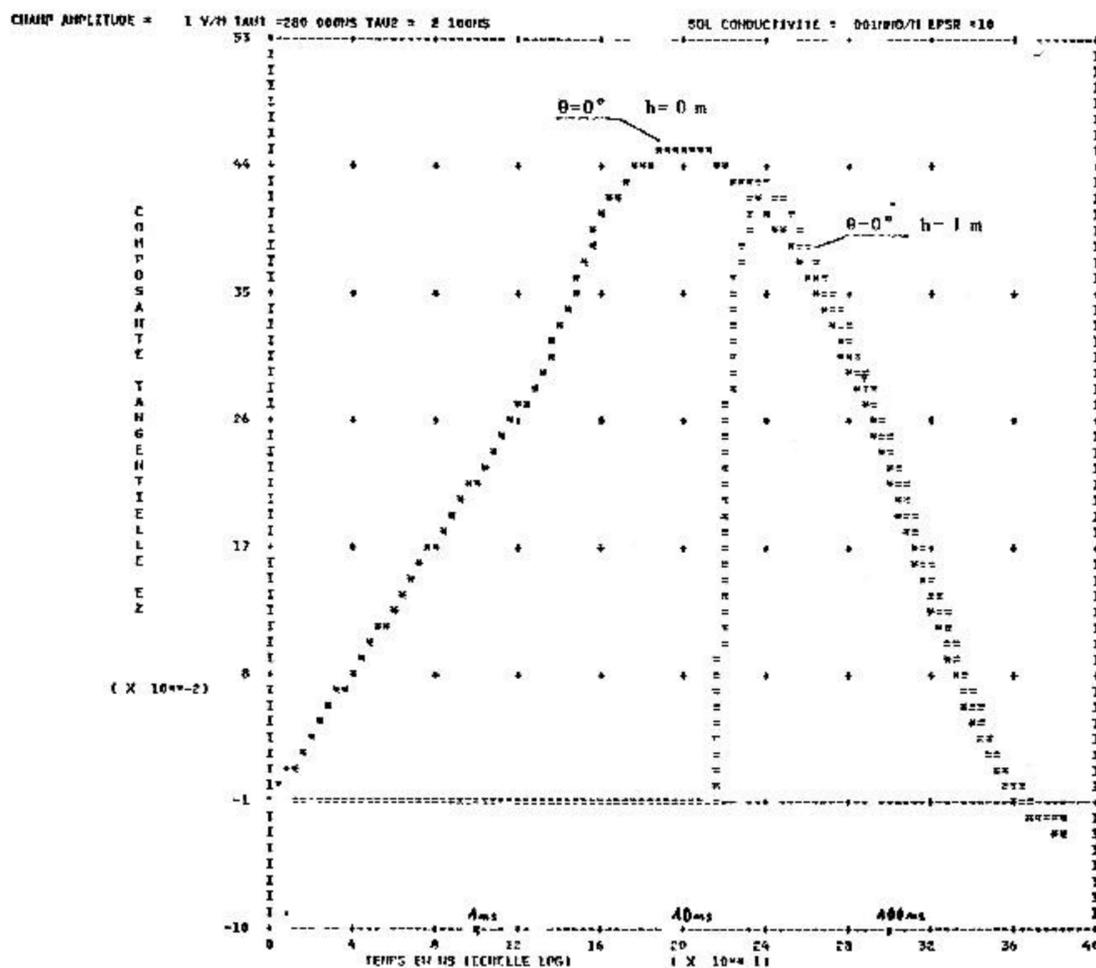


FIG. 6. — Composante tangentielle du champ transmis dans le sol aux profondeurs $z = 0$ m et $z = 1$ m en fonction du temps.
Tangential component of the transmitted field at depth $z = 0$ m and $z = 1$ m versus time.

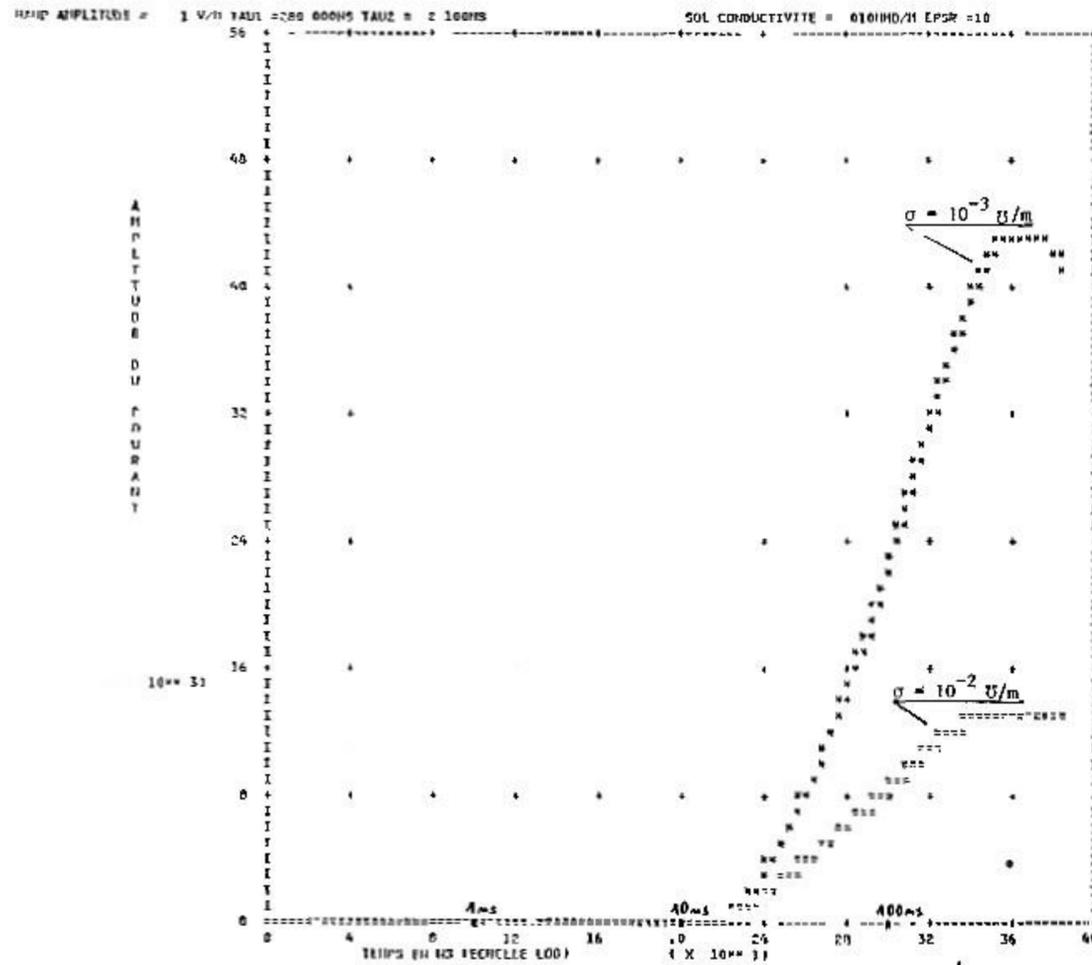


FIG. 7. — Courant induit sur un conducteur infini en fonction du temps.
Induced current on an infinite wire versus time.

La figure 7 indique la variation du courant pour deux valeurs de la conductivité du sol ($\sigma = 10^{-3} \text{ } \Omega/\text{m}$ et $\sigma = 10^{-2} \text{ } \Omega/\text{m}$). La valeur crête obtenue apparaît inversement proportionnelle à la racine carrée de la conductivité.

9. CONCLUSION

Les principaux avantages de la méthode développée dans cet article sont les suivants :

- simplicité du résultat ;
- la sensibilité de la réponse aux paramètres du système peut être évaluée facilement ;
- la méthode ligne de transmissions permet de considérer des impédances de charge quelconques ;
- la transposition des résultats au domaine temporel peut s'effectuer analytiquement dans le cas d'un conducteur infini.

L'extension de la méthode proposée par Hallén, au cas d'un milieu dispersif, pour le traitement des extrémités, donne par ailleurs des résultats satisfaisants. Ceux-ci sont confirmés par les résultats d'une autre étude développée parallèlement où les intégrales de Sommerfeld sont évalués numériquement et également par les résultats de la méthode type lignes de transmission.

Aucune hypothèse n'a par ailleurs été retenue pour la profondeur du conducteur qui peut être quelconque.

Les calculs ont été effectués pour une onde incidente plane mais s'appliquent de la même façon si le champ incident est quelconque.

Les résultats obtenus s'appliquent d'une façon générale au cas d'une antenne située dans un milieu conducteur au voisinage de l'interface avec un milieu moins conducteur (antenne immergée dans la mer par exemple).

REMERCIEMENTS.

Je remercie tout particulièrement M. Robin-Jouan pour ses remarques et ses conseils pendant le déroulement de cette étude.

ANNEXE II

Calcul de la composante tangentielle du champ transmis dans le sol

1. Solution dans le domaine fréquentiel.

La source étant située à grande distance, l'onde incidente est supposée plane. Les calculs effectués ci-après sont relatifs à un champ polarisé verticalement (vecteur \vec{E} dans le plan d'incidence).

Les vecteurs d'ondes \vec{k}_0 et \vec{k}_1 des ondes incidente et transmise ont pour composantes :

$$\vec{k}_0 \begin{cases} + \cos \theta_0 \\ - \sin \theta_0 \sin \psi \\ + \sin \theta_0 \cos \psi \end{cases}$$

$$\vec{k}_1 \begin{cases} + \cos \theta_1 \\ - \sin \theta_1 \sin \psi \\ + \sin \theta_1 \cos \psi \end{cases}$$

$$T(\omega) = \frac{2 \cos \theta_0 \sqrt{\epsilon_r - \sin^2 \theta_0} \sqrt{1 + \frac{\sigma}{j \omega \epsilon_0 (\epsilon_r - \sin^2 \theta_0)}}}{\cos \theta_0 \epsilon_r \left(1 + \frac{\sigma}{j \omega \epsilon_0 \epsilon_r}\right) + \sqrt{\epsilon_r - \sin^2 \theta_0} \sqrt{1 + \frac{\sigma}{j \omega \epsilon_0 (\epsilon_r - \sin^2 \theta_0)}}}$$

Les modules des vecteurs incident et transmis sont par conséquent :

$$(A-1) \quad E^i = E^i e^{j\omega \left(t - \frac{x \cos \theta_0 - y \sin \theta_0 \sin \psi + z \sin \theta_0 \cos \psi}{c}\right)}$$

$$(A-2) \quad TE^i = TE^i e^{j\omega \left(t - \frac{x \cos \theta_1 - y \sin \theta_1 \sin \psi + z \sin \theta_1 \cos \psi}{c}\right)}$$

On déduit la composante tangentielle du champ transmis dans le plan $y = 0$:

$$TE_z^i = TE^i \cos \theta_1 \cos \psi e^{-jk_1 x \cos \theta_1} e^{-jk_1 z \sin \theta_1 \cos \psi}$$

$$TE_z^t = TE^t \cos \theta_1 \cos \psi e^{-jk_1 x \cos \theta_1} e^{-jk_0 z \sin \theta_0 \cos \psi}$$

La constante de propagation dans l'air k_0 étant purement réelle ($k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$), le module de TE_z^i est constant pour une profondeur $x = h$ donnée. La variation en z introduit une variation de phase :

$$(A-3) \quad TE_z^i(h, 0, z) = E_0 e^{-jk_0 \sin \theta_0 \cos \psi z}$$

avec :

$$(A-4) \quad E_0 = TE^i \cos \theta_1 \cos \psi e^{-jk_1 x \cos \theta_1}$$

2. Solution dans le domaine temporel.

L'amplitude du champ à la profondeur $z = 0$ dans le sol peut être obtenue à l'aide des coefficients de Fresnel. Dans le cas d'une onde polarisée verticalement, le facteur de transmission du champ électrique est fourni par l'expression :

$$(A-5) \quad |\vec{E}_1| = \frac{2 k_1 k_0 \cos \theta_0}{k_1^2 \cos \theta_0 + k_0 \sqrt{k_1^2 - k_0^2 \sin^2 \theta_0}} |\vec{E}^i|$$

On en déduit la valeur de la composante E_{1x} :

$$(A-6) \quad |\vec{E}_{1x}| = \frac{2 k_1 k_0 \cos \theta_0 \cos \theta_1}{k_1^2 \cos \theta_0 + k_0 \sqrt{k_1^2 - k_0^2 \sin^2 \theta_0}} |\vec{E}^i|$$

$$|\vec{E}_{1x}| = \frac{2 k_0 \cos \theta_0 \sqrt{k_1^2 - k_0^2 \sin^2 \theta_0}}{k_1^2 \cos \theta_0 + k_0 \sqrt{k_1^2 - k_0^2 \sin^2 \theta_0}} |\vec{E}^i|$$

avec :

$$k_1^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \left(\epsilon_r - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0}\right); \quad k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$$

Il vient :

$$(A-7) \quad T(\omega) = \frac{|\vec{E}_{1x}|}{E^i} = \frac{2 \cos \theta_0 \sqrt{\epsilon_r - \sin^2 \theta_0} \sqrt{1 + \frac{\sigma}{j \omega \epsilon_0 (\epsilon_r - \sin^2 \theta_0)}}}{\cos \theta_0 \left(\epsilon_r - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0}\right) + \sqrt{\epsilon_r - \sin^2 \theta_0} \sqrt{1 + \frac{\sigma}{j \omega \epsilon_0 (\epsilon_r - \sin^2 \theta_0)}}}$$

$$(A-8) \quad T(\omega) = \frac{a \sqrt{1 + \beta/p}}{b(1 + \alpha/p) + c \sqrt{1 + \beta/p}}$$

avec :

$$a = 2 \cos \theta_0 \sqrt{\epsilon_r - \sin^2 \theta_0}; \quad b = \epsilon_r \cos \theta_0;$$

$$c = \sqrt{\epsilon_r - \sin^2 \theta_0}$$

$$\alpha = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r}, \quad \beta = \frac{\sigma}{\epsilon_0 (\epsilon_r - \sin^2 \theta_0)}$$

p est la variable de Laplace : $p = j\omega$.

En multipliant par l'expression conjuguée du dénominateur, il vient :

$$(A-9) \quad T(\omega) = \frac{a \sqrt{p(p + \beta)} (b(p + \alpha) - c \sqrt{p(p + \beta)})}{(b(p + \alpha) + c \sqrt{p(p + \beta)}) (b(p + \alpha) - c \sqrt{p(p + \beta)})}$$

(A-10)

$$T(\omega) = \frac{ab(p + \alpha) \sqrt{p(p + \beta)} - acp(p + \beta)}{(b^2 - c^2)(p + d)(p + e)}$$

Le module de la composante tangentielle du champ transmis pour le signal impulsionnel de référence s'obtient en multipliant l'expression précédente par le spectre de ce signal. En considérant pour celui-ci la forme temporelle $f(t) = e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}$, on déduit sa transformée de Fourier $F(\omega)$:

$$F(\omega) = \frac{1}{p + 1/\tau_1} - \frac{1}{p + 1/\tau_2} = \frac{1}{p + \gamma_1} - \frac{1}{p + \gamma_2}$$

Considérant dans un premier temps uniquement le premier terme, on obtient :

$$TE(\omega) = \frac{1}{b^2 - c^2} \left(\frac{ab(p + \alpha) \sqrt{p(p + \beta)}}{(p + d)(p + e)(p + \gamma_1)} - \frac{acp(p + \beta)}{(p + d)(p + e)(p + \gamma_1)} \right)$$

$$TE(\omega) = \frac{1}{b^2 - c^2} \left(\frac{ab(p + \alpha)(p + \beta)p}{(p + d)(p + e)(p + \gamma_1)} \times \frac{1}{\sqrt{p(p + \beta)}} - \frac{acp(p + \beta)}{(p + d)(p + e)(p + \gamma_1)} \right)$$

(A-11)

$$TE(\omega) = \frac{1}{\sqrt{p(p + \beta)}} \left(\frac{ab}{b^2 - c^2} + \frac{A}{p + d} + \frac{B}{p + e} + \frac{C}{p + \gamma_1} \right) + \frac{D}{p + d} + \frac{E}{p + e} + \frac{E}{p + \gamma_1}$$

L'expression temporelle correspondante s'en déduit par transformation inverse de Laplace :

$$(A-12) \quad TE^1(0, t) = \frac{ab}{b^2 - c^2} I_0\left(\frac{\beta t}{2}\right) e^{-\beta t/2} + \\ A \int_0^t I_0\left(\frac{\beta \tau}{2}\right) e^{-\beta \tau/2} e^{-d(t-\tau)} d\tau + B \int_0^t I_0\left(\frac{\beta \tau}{2}\right) \times \\ e^{-\beta \tau/2} e^{-e(t-\tau)} d\tau + C \int_0^t I_0\left(\frac{\beta \tau}{2}\right) e^{-\beta \tau/2} e^{-\gamma_1(t-\tau)} d\tau + \\ D e^{-at} + E e^{-at} + F e^{-\gamma_1 t},$$

sachant :

$$L^{-1} \frac{1}{\sqrt{p(p+\beta)}} = I_0\left(\frac{\beta t}{2}\right) e^{-\beta t/2}.$$

La procédure précédente doit être exécutée deux fois consécutivement pour les valeurs γ_1 puis γ_2 . Le champ transmis est la différence des résultats obtenus.

3. Composante tangentielle du champ électrique à une profondeur $x > 0$.

Le milieu I étant conducteur, la constante de propagation k_1 est complexe et la propagation s'effectue avec pertes.

$$TE(x = h, \omega) = TE(x = 0, \omega) e^{-\gamma x},$$

$$\text{avec : } \gamma^2 = -\omega^2 \mu \varepsilon + \mathbf{j} \mu \sigma \omega = \mu \varepsilon p(p + \sigma/\varepsilon),$$

$$\gamma^2 = \mu \varepsilon p(p + \alpha) \text{ avec : } \alpha = \sigma/\varepsilon,$$

(A-13)

$$TE(x = h, \omega) = TE(x = 0, \omega) e^{-x\sqrt{\mu\varepsilon\sqrt{p(p+\alpha)}}}.$$

En utilisant la relation suivante (Abramowitz 29.3.96) [7] il vient :

$$e^{-k\sqrt{s^2-a^2}} - e^{-ks} \subset \frac{ak}{\sqrt{t^2-k^2}} I_1(a\sqrt{t^2-k^2}) u(t-k),$$

$$e^{-k\sqrt{s(s+2a)}} - e^{-k(s+a)} \subset$$

$$\frac{ak}{\sqrt{t^2-k^2}} e^{-at} I_1(a\sqrt{t^2-k^2}) u(t-k),$$

$$e^{-k\sqrt{s(s+a)}} \subset \frac{1}{2} \frac{\alpha k}{\sqrt{t^2-k^2}} e^{-\alpha t/2} \times$$

$$I_1\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{t^2-k^2}\right) u(t-k) + e^{-\alpha t/2} \delta(t-k).$$

La composante tangentielle du champ transmis s'obtient en effectuant le produit de convolution de cette fonction par l'expression temporelle du champ transmis à la profondeur $x = 0$: $TE(x = 0, t)$.

Le produit de convolution avec le deuxième terme conduit simplement à l'expression :

$$e^{-k\alpha/2} TE(x = 0, t-k) = e^{-x\sigma/2\sqrt{\mu\varepsilon}} TE(x = 0, t-k).$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BÉNIGUEL (Y.). Courant induit par une onde incidente sur un conducteur rectiligne et filiforme situé au voisinage du sol. Première partie : conducteur au-dessus du sol. Calcul dans les domaines fréquentiel et temporel. *Ann. Télécommun.*, Fr. (1982), 37, n° 1-2, pp. 97-109.
- [2] WAIT (J. R.). Electromagnetic wave propagation along a buried insulated wire. *Canad. J. Phys.* (1972), 50, pp. 2402-2409.
- [3] WAIT (J. R.). Excitation of currents on a buried insulated cable. *J. appl. physics*, USA (1978), 49, 2, pp. 876-880.
- [4] HALLEN (E.). Electromagnetic theory. *Chapman and Hall*, London (1962).
- [5] BAÑOS (A.). Dipole radiation in the presence of a conducting half space. *Pergamon*, NY (1966).
- [6] KING (R. W. P.). Electromagnetic waves and antennas above and below the surface of the earth. *Radio Sci.*, USA (1979), 14, n° 2.
- [7] ABRAMOWITZ (M.), STEGUN (I. A.). Handbook of mathematical functions. *Dover Publ.*, New York (1972).