

Courant induit par une onde incidente sur un conducteur rectiligne et filiforme situé au voisinage du sol

Yannick BÉNIGUEL

Docteur ès Sciences *

PREMIÈRE PARTIE

CONDUCTEUR AU-DESSUS DU SOL

CALCUL DANS LES DOMAINES FRÉQUENTIEL ET TEMPOREL

Analyse

Le problème du calcul du courant induit par une onde incidente sur un conducteur aérien, rectiligne, filiforme, situé au voisinage du sol et parallèle à l'interface air-sol est analysé. La solution recherchée est dans le domaine fréquentiel sur un conducteur infini. Ceci permet d'éviter le calcul numérique des intégrales de Sommerfeld en leur substituant des intégrales qui se calculent analytiquement. Le courant induit sur un conducteur de dimension finie s'obtient en ajoutant les courants réfléchis aux extrémités pour les différents ordres successifs de réflexion.

Mots clés : Courant induit, Onde électromagnétique, Antenne fil, Effet sol, Méthode domaine fréquence, Facteur réflexion, Antenne horizontale, Méthode analytique.

Sommaire

1. Introduction.
2. Calcul du champ rayonné par un conducteur infini en présence du sol et en l'absence d'excitation.
3. Modélisation de l'excitation : méthode modale.
4. Méthode utilisant les facteurs de réflexion introduits par Hallén.
5. Méthode utilisant les facteurs de réflexion au sens des lignes de transmission.
6. Remarques sur la validité des résultats obtenus.
7. Solution dans le domaine temporel.
8. Résultats.
9. Conclusion.

Annexe

Bibliographie (9 réf.).

CURRENT INDUCED BY AN INCIDENT WAVE ON A STRAIGHT WIRE ABOVE A FLAT EARTH

Abstract

An analytical result for the current induced by an incident wave on a thin straight wire located in the vicinity of the ground and parallel to the interface is presented. Two methods are presented to solve this problem in the frequency domain. The first one uses the current on an infinite wire ; the current induced on a finite wire is obtained adding to the preceding solution the reflected currents of different orders. The second uses the reflection coefficient of the transmission line theory. The results are compared with those obtained from another method in which Sommerfeld integrals are numerically evaluated.

Key words : Induced current, Electromagnetic wave, Wire antenna, Ground effect, Frequency domain method, Reflection coefficient, Horizontal antenna, Analytical method, Time domain method.

1. INTRODUCTION

Le calcul du courant induit par une onde électromagnétique sur un conducteur aérien rectiligne filiforme, situé au voisinage du sol et parallèle à l'interface air-sol, a fait l'objet de nombreuses publications. La complexité de ce problème tient à la difficulté de prendre en compte l'effet du sol de façon exacte. En effet, pour chacun des éléments de courant qui constituent le conducteur, il est nécessaire de résoudre des intégrales introduites par Sommerfeld et dont il n'existe pas de forme asymptotique en zone de rayonnement proche.

Un certain nombre de solutions ont récemment été publiées sur ce sujet. King [8] calcule le courant induit en utilisant une formulation type ligne de transmission. La solution obtenue fait apparaître les intégrales de Sommerfeld qui doivent être évaluées

* Laboratoire Central de Télécommunications, Vélizy-Villacoublay.
Etude effectuée sous contrat Aérospatiale.

numériquement. Chang et Olsen [9] ont utilisé les équations intégrales exactes suivant la forme proposée par Baños [6] et transformé l'expression ainsi obtenue par rapport à une variable formelle, afin de pouvoir utiliser le théorème de convolution. La solution obtenue en revenant à la variable spatiale contient trois termes correspondant aux deux pôles de la fonction à intégrer (un mode type ligne de transmission et un mode *onde rapide*) et à l'intégration sur le contour utilisé dans le plan complexe. L'emploi des résultats obtenus n'est malheureusement pas très simple.

Dans cet article, nous indiquons une méthode pour résoudre analytiquement ce problème. Les résultats obtenus sont par ailleurs comparés avec ceux fournis par une autre étude développée parallèlement où les intégrales de Sommerfeld sont calculées numériquement.

La méthode employée est une méthode modale. La première partie a pour objet le calcul du champ rayonné par un conducteur filiforme infini parcouru par une distribution de courants quelconques en présence du sol et en l'absence d'onde incidente. La méthode, proposée par Wait [1], utilise la notion de facteurs de réflexion du champ électromagnétique sur le sol et identifie ces facteurs pour satisfaire les conditions aux limites.

La seconde partie a pour objet le problème de diffraction associé à la configuration précédente. Les différents modes sont pris en compte pour calculer le courant induit sur un conducteur infini par une onde monochromatique. La solution obtenue est ensuite étendue au cas d'un conducteur fini en superposant à la solution obtenue les courants réfléchis aux extrémités de celui-ci pour les différents ordres successifs de réflexion.

La solution obtenue dans le domaine fréquentiel, pour un conducteur infini permet d'en déduire la forme du courant dans le domaine temporel par transformation inverse de Laplace. Le problème est ensuite étendu au cas d'une excitation impulsionnelle. Le courant obtenu dans ce cas s'exprime par un produit de convolution de la solution temporelle précédemment obtenue par l'expression temporelle du champ incident sur le conducteur correspondant au signal d'excitation.

2. CALCUL DU CHAMP RAYONNÉ PAR UN CONDUCTEUR INFINI EN PRÉSENCE DU SOL ET EN L'ABSENCE D'EXCITATION

On suppose le conducteur parcouru par un courant :

$$(1) \quad I = I_0 e^{j(\omega t - \beta z)},$$

β est l'exposant linéique de propagation de ce courant sur le fil et caractérise un mode particulier de rayonnement.

Le champ électromagnétique peut se calculer à partir des vecteurs de Hertz de type électrique $\vec{\Pi}$ et magnétique $\vec{\Pi}^*$ par les relations :

$$(2) \quad \vec{E} = \nabla \times \nabla \times \vec{\Pi} - \mu \nabla \times \frac{\partial \vec{\Pi}^*}{\partial t},$$

$$(3) \quad \vec{H} = \epsilon \nabla \times \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t} + \nabla \times \nabla \times \vec{\Pi}^*.$$

Les vecteurs de Hertz satisfont chacun à l'équation de Helmholtz dans un milieu homogène :

$$(4) \quad \nabla^2 \vec{\Pi} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} = 0,$$

$$(5) \quad \nabla^2 \vec{\Pi}^* - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{\Pi}^*}{\partial t^2} = 0.$$

Le système est rapporté à un repère cylindrique centré sur le fil. Le courant étant axial, le vecteur de Hertz de type électrique $\vec{\Pi}$ possède la même dépendance en z que le courant. L'équation de Helmholtz s'écrit dans ce cas :

$$(6) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} - (\beta^2 - k_1^2) \Pi = 0.$$

avec $k_1^2 = \omega^2 \mu \epsilon$, k_1 étant l'exposant de propagation dans le vide.

En utilisant la méthode de séparation des variables, on obtient l'équation de Bessel modifiée dont les solutions sont les fonctions de Bessel modifiées de première espèce I_ν et de seconde espèce K_ν et d'argument complexe. Le vecteur de Hertz obtenu a pour expression en coordonnées cartésiennes (x vertical, y transversal, z axial) :

$$(7) \quad \vec{\Pi} = -\frac{j\omega\mu I}{2\pi k_1^2} e^{j(\omega t - \beta z)} \times K_0(j(k_1^2 - \beta^2)^{1/2} ((x-h)^2 + y^2)^{1/2}).$$

Il lui correspond la formulation intégrale :

$$(8) \quad \vec{\Pi} = -\frac{j\omega\mu I}{4\pi k_1^2} e^{j(\omega t - \beta z)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u_1|x-h|}}{u_1} e^{-j\lambda y} d\lambda.$$

avec $u_1^2 = \lambda^2 + \beta^2 - k_1^2$.

Le vecteur de Hertz ainsi obtenu est le vecteur de Hertz de type primaire résultant de l'existence du courant circulant sur le fil et indépendamment du sol. Afin de prendre en compte celui-ci, il est utile de définir des vecteurs de Hertz de type secondaire. Wait [1] a proposé pour ceux-ci des expressions de forme voisine avec l'introduction des facteurs de réflexion attribués au sol :

$$(9 a) \quad \Pi_1 = A \int_{-\infty}^{+\infty} R(\lambda) e^{-u_1(x+h)} e^{-j\lambda y} \frac{1}{u_1} d\lambda,$$

$$(9 b) \quad \Pi_2 = A \int_{-\infty}^{+\infty} T(\lambda) e^{u_2 x} e^{-u_1 h} e^{-j\lambda y} \frac{1}{u_1} d\lambda,$$

$$(9 c) \quad \Pi_1^* = A \int_{-\infty}^{+\infty} M(\lambda) e^{-u_1 x} e^{-u_1 h} e^{-j\lambda y} \frac{1}{u_1} d\lambda,$$

$$(9d) \quad \Pi_2^* = A \int_{-\infty}^{+\infty} N(\lambda) e^{u_2 x} e^{-u_1 h} e^{-j\lambda y} \frac{1}{u_1} d\lambda,$$

avec $A = -\frac{j\omega\mu I}{4\pi k_1^2} e^{j(\omega t - \beta z)}$.

Le vecteur de Hertz $\vec{\Pi}_1$ dans le milieu (1) est par conséquent :

$$(10) \quad \Pi_1 = A \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{+u_1(x-h)} + R(\lambda) e^{-u_1(x+h)}) \frac{e^{-j\lambda y}}{u_1} d\lambda.$$

Les facteurs de réflexion $R(\lambda)$, $T(\lambda)$, $M(\lambda)$, $N(\lambda)$ sont déterminés en assurant la continuité des composantes tangentielles E_y , E_z , H_y , H_z du champ à l'interface air-sol.

Les facteurs de réflexion sont solutions du système linéaire suivant :

$$(11) \quad \begin{aligned} (1 + R(\lambda)) j\lambda\beta - \omega\mu u_1 M(\lambda) &= T(\lambda) j\lambda\beta + \omega\mu u_2 N(\lambda), \\ (k_1^2 - \beta^2)(1 + R(\lambda)) &= (k_2^2 - \beta^2) T(\lambda), \\ j\lambda\beta M(\lambda) - \omega\varepsilon_1 u_1(1 - R(\lambda)) &= j\lambda\beta N(\lambda) - \omega\varepsilon_2 u_2 T(\lambda), \\ (k_1^2 - \beta^2) M(\lambda) &= (k_2^2 - \beta^2) N(\lambda). \end{aligned}$$

On en déduit la valeur de $R(\lambda)$:

$$(12) \quad R(\lambda) = -1 + \frac{2k_1^2(\lambda^2 - u_1 u_2)}{(k_1^2 - \beta^2)(k_1^2 u_2 + k_2^2 u_1)} u_1.$$

La composante tangentielle du champ électrique s'obtient par la relation :

$$(13) \quad E_z = \left(k_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Pi_1.$$

Ce qui conduit, en remplaçant Π_1 par sa valeur, à l'expression suivante :

$$(15) \quad \begin{aligned} E_z = & -\frac{j\omega\mu I}{2\pi k_1^2} (k_1^2 - \beta^2) \times \\ & K_0(j(k_1^2 - \beta^2)^{1/2} ((x-h)^2 + y^2)^{1/2}) \\ & + \frac{j\omega\mu I}{2\pi k_1^2} (k_1^2 - \beta^2) K_0(j(k_1^2 - \beta^2)^{1/2} ((x+h)^2 + y^2)^{1/2}) \\ & - \frac{j\omega\mu I}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^2 - u_1 u_2}{k_1^2 u_2 + k_2^2 u_1} e^{-u_1(x+h) - j\lambda y} d\lambda. \end{aligned}$$

Le terme intégral peut être décomposé comme suit :

$$(16) \quad -\frac{j\omega\mu I}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^2 - u_1 u_2}{k_1^2 u_2 + k_2^2 u_1} e^{-u_1(x+h) - j\lambda y} d\lambda = -\frac{j\omega\mu I}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u_1(x+h) - j\lambda y}}{u_1 + u_2} d\lambda + \frac{j\omega\mu I \beta^2}{2\pi k_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u_1(x+h) - j\lambda y}}{u_2 + (k_2^2/k_1^2)u_1} d\lambda.$$

Le terme $|k_2|/|k_1|$ étant toujours supérieur à 1, quelle que soit la fréquence, la deuxième intégrale est par conséquent négligeable devant la première. La première intégrale de (16) peut se transformer pour obtenir l'expression (17) pour $x = h$ et $y = 0$:

$$(17) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u_1(2h)}}{u_1 + u_2} d\lambda \neq -\frac{2}{\alpha^2} + 2 \int_0^{\infty} (1+g)^{1/2} e^{-\alpha g} dg = J_c(\alpha),$$

avec :

$$\alpha = 2 j k_2 h.$$

Le calcul de cette intégrale peut s'effectuer en utilisant les fonctions de Bessel et de Struve et notamment la relation (18) (cf. Watson p. 331 [2]) :

$$(18) \quad H_1(\alpha) = Y_1(\alpha) + \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha u} (1+u^2)^{-1/2} du,$$

soit :

$$(19) \quad J_c(\alpha) = -\frac{2}{\alpha^2} + 2 T(\alpha),$$

avec :

$$(20) \quad T(\alpha) = \frac{\pi}{2\alpha} (H_1(\alpha) - Y_1(\alpha)).$$

Le terme $T(\alpha)$ admet deux développements en fonction de la valeur de α par rapport à 1.

$$(|\alpha| = 1 \Leftrightarrow f = \frac{1}{8\pi\mu\sigma h^2}, \text{ Exemple pour : } \sigma = 10^{-2} \text{ U/m,}$$

et $h = 10 \text{ m}$ on a $f = 31,6 \text{ kHz}$.)

a) $|\alpha| \ll 1$ i.e. $2h/\delta \ll 1$,

$$(21) \quad \begin{aligned} T(\alpha) - \frac{1}{\alpha^2} &= \frac{\alpha}{3} + \frac{1}{4} - \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \log_e \frac{\alpha}{2} - \\ & \frac{\alpha^2}{32} \left(\frac{5}{2} - 2\gamma - 2 \log_e \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{\alpha^3}{45} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_c(\alpha) &= \frac{2\alpha}{3} + \frac{1}{2} - \gamma - \log_e \frac{\alpha}{2} - \\ & \frac{\alpha^2}{16} \left(\frac{5}{2} - 2\gamma - 2 \log_e \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{2\alpha^3}{45} + \dots \end{aligned}$$

b) $|\alpha| \gg 1$ i.e. $2h/\delta \gg 1$.

$$(22) \quad \begin{aligned} T(\alpha) - \frac{1}{\alpha^2} &= \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^3} - \frac{3}{\alpha^5} + \frac{45}{\alpha^7} + \dots \\ J_c(\alpha) &= \frac{2}{\alpha} - \frac{2}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3} - \frac{6}{\alpha^5} + \dots \end{aligned}$$

Dans l'hypothèse réaliste où λ est très supérieur à h , il est légitime de remplacer dans l'expression de E_z les fonctions de Bessel par leurs développements asymptotiques. On obtient finalement, dans les deux cas envisagés précédemment :

1) $|\alpha| \ll 1$ ($\delta \gg 2h$) *approximation basse fréquence.*

$$(23) \quad \begin{aligned} E_z = & -\frac{j\omega\mu I}{2\pi} \left(\log_e \frac{2h}{a} + \frac{4h}{3\delta} + \frac{1}{2} - \gamma - \log_e \frac{\sqrt{2}h}{\delta} \right) + \\ & \frac{\omega\mu I}{2\pi} \left(\frac{4h}{3\delta} - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\beta^2 I}{j 2\pi\omega\varepsilon} \log_e \frac{2h}{a}. \end{aligned}$$

2) $|\alpha| \gg 1$ ($\delta \ll 2h$) *approximation haute fréquence.*

$$(24) \quad \begin{aligned} E_z = & -\frac{j\omega\mu I}{2\pi} \left(\log_e \frac{2h}{a} + \frac{\delta}{2h} \right) - \\ & \frac{\omega\mu I}{2\pi} \frac{\delta}{2h} - \frac{\beta^2 I}{j 2\pi\omega\varepsilon} \log_e \frac{2h}{a}. \end{aligned}$$

Dans le cas où la conductivité du milieu (2) devient infinie (plan parfaitement conducteur), on obtient :

$$(25) \quad E_z = -\frac{j\omega\mu I}{2\pi} \log_e \frac{2h}{a} - \frac{\beta^2 I}{j2\pi\omega\epsilon} \log_e \frac{2h}{a}.$$

Ces expressions s'écrivent sous la forme :

$$(26) \quad E_z = -\left(Z + \frac{\beta^2}{Y}\right) I,$$

où : Z est de même nature qu'une impédance, et : Y est de même nature qu'une admittance.

3. MODÉLISATION DE L'EXCITATION : MÉTHODE MODALE

Conducteur infini.

Le courant induit sur le conducteur crée un champ rayonné tel que la composante tangentielle du champ total soit nulle à la surface du conducteur. Le champ rayonné est obtenu en sommant les contributions de toutes les composantes modales :

$$(27) \quad E(z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(Z + \frac{\beta^2}{Y}\right) I^*(\beta) e^{-j\beta z} d\beta.$$

La composante tangentielle E_z du champ admet par rapport à la variable β une transformée de Fourier, les variables z et β se correspondant dans la transformation. En prenant la transformation inverse, il vient :

$$(28) \quad I^*(\beta) \left(Z + \frac{\beta^2}{Y}\right) = -E^*(\beta, \omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(z, \omega) e^{j\beta z} dz.$$

$$(29) \quad I^*(\beta) = -\frac{E^*(\beta, \omega)}{Z + \beta^2/Y} = -E^*(\beta, \omega) F^*(\beta).$$

En appelant $f(z)$ la fonction obtenue par transformation inverse de $F^*(\beta)$, on obtient :

$$(30) \quad I(z) = -\int_{-\infty}^{\infty} E(z-u, \omega) f(u) du.$$

Calcul de la fonction $f(z)$.

Posant $Y = jY'$; $Z = jZ'$, Y' réel, $f(z)$ peut s'écrire :

$$(31) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\beta z}}{Z + \beta^2/Y} d\beta = \frac{jY'}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\beta z}}{\beta^2 - Z'Y'} d\beta.$$

L'intégrale obtenue se calcule par la méthode des résidus. Le domaine d'intégration est le demi-plan complexe supérieur si z est négatif et le demi-plan complexe inférieur si z est positif.

La solution obtenue est :

$$a) \quad z > 0 \quad f_1(z) = \frac{1}{2Z_c} e^{-j\beta_0 z},$$

$$b) \quad z < 0 \quad f_2(z) = \frac{1}{2Z_c} e^{j\beta_0 z},$$

avec : $\beta_0 = \sqrt{Z'Y'}$ et $Z_c = \sqrt{Z'/Y'}$.

Calcul du produit de convolution.

La composante tangentielle du champ électromagnétique ambiant peut se mettre sous la forme suivante (cf. Annexe I) :

$$(32) \quad E_z^a = E^i \cos \theta \cos \psi (e^{jkx \cos \theta} - R e^{-jkx \cos \theta}) \times e^{-jkz \sin \theta \cos \psi},$$

$$(33) \quad E_z^a = E_0 e^{-jkz \sin \theta \cos \psi} = E_0 e^{-jk_z z}.$$

Le calcul de l'intégrale conduit à l'expression :

$$(34) \quad I(z) = -\frac{E_z^a}{jZ_c} \frac{\beta_0}{\beta_0^2 - k_z^2}.$$

Cette solution obtenue est la solution exacte pour le courant induit sur un conducteur infini situé au voisinage du sol et parallèle à celui-ci.

Le courant ainsi obtenu est de la forme $I = I_0 e^{-j\beta z}$. En prenant $\beta = k_z$, on vérifie facilement, dans le cas où le terme de pertes est négligé, que la composante tangentielle du champ diffracté par celui-ci est égale et de signe contraire à celle du champ incident :

$$(35) \quad E_z^d = -\left(jZ' + \frac{(k \sin \theta \cos \psi)^2}{jY'}\right) \times \frac{E_z^a}{jkZ_c (1 - (\sin \theta \cos \psi)^2)},$$

avec :

$$k = \beta = \sqrt{Z'Y'} \text{ et } Z_c = \sqrt{Z'/Y'}, \quad kZ_c = Z',$$

il vient :

$$(36) \quad E_z^d = -\left(\frac{jZ'}{jZ'} + \frac{(\sqrt{Z'Y'} \sin \theta \cos \psi)^2}{-Z'Y'}\right) \times \frac{E_z^a}{1 - (\sin \theta \cos \psi)^2} = -E_z^a,$$

Courant induit sur un conducteur infini.

En calculant les expressions de β_0 et Z_c dans les deux cas précédemment envisagés, on obtient :

— Approximation haute fréquence :

$$(37) \quad I(z) = -\frac{E_z^a}{jk \frac{\eta_0}{2\pi} \log_e \frac{2h}{a}} \times \frac{1}{1 - (\sin \theta \cos \psi)^2 + \frac{\delta}{2h} \frac{1}{\log_e \frac{2h}{a}} (1-j)},$$

— Approximation basse fréquence :

(38)

$$I(z) = - \frac{E_z^a}{jk \frac{\eta_0}{2} \log_e \frac{2h}{a}} \frac{1}{1 - (\sin \theta \cos \psi)^2 + \frac{1}{\log_e 2h/a} \left(\frac{4h}{3\delta} + \frac{1}{2} - \gamma - \log_e \frac{\sqrt{2}h}{\delta} \right) + j \frac{1}{\log_e 2h/a} \left(\frac{4h}{3\delta} - \frac{\pi}{4} \right)}$$

Solution au voisinage d'un plan parfaitement conducteur.

La composante normale E_x^a du champ ambiant a pour expression :

(39) $E_x^a = E^i \sin \theta (e^{jkx \cos \theta} + R e^{-jkx \cos \theta}) \times e^{-jkz \sin \theta \cos \psi}$

Dans le cas d'un plan parfaitement conducteur, le facteur de réflexion est égal à 1. Il vient :

(40) $E_x^a = E^i \sin \theta 2 \cos(kx \cos \theta) e^{-jkz \sin \theta \cos \psi}$

De même :

(41) $E_z^a = E^i \cos \theta \cos \psi e^{-jkz \sin \theta \cos \psi} 2 j \sin(kx \cos \theta)$

(42) $E_z^a = j \frac{\cos \psi}{\tan \theta} \tan(kx \cos \theta) E_x^a = 2 j \cos \theta \cos \psi \tan(kx \cos \theta) E^i$

Introduisant dans l'expression de $I(z)$:

(43) $I(z) = - \frac{1}{jk Z_c} \frac{1}{1 - (\sin \theta \cos \psi)^2} \times 2 j \cos \theta \cos \psi \tan(kx \cos \theta) E^i$

Au voisinage du plan parfaitement conducteur, kx est faible, il vient :

(44) $I(z) = - \frac{2}{Z_c} \frac{x \cos \psi \cos^2 \theta}{1 - (\sin \theta \cos \psi)^2} E^i$

L'expression de Z_c est dans ce cas celle d'un conducteur situé au-dessus d'un plan parfaitement conducteur :

$$Z_c = 60 \log_e 2h/a$$

Si l'on prend de plus l'hypothèse $\psi = 0$, on obtient :

(45) $I(z) = - 2 h E^i / Z_c$

Cette expression a été obtenue par une autre méthode dans ce cas particulier par Y. Robin-Jouan (*).

4. MÉTHODE UTILISANT LES FACTEURS DE RÉFLEXION INTRODUIIS PAR HALLÈN

Les réflexions aux extrémités du conducteur peuvent être traitées en appliquant la méthode proposée

par Hallèn [chap. 35 de la réf. 3]. On peut décomposer arbitrairement le potentiel vecteur selon la série suivante :

(46) $A = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n V_n e^{-jkl(2n-1)}$

La forme du courant associé est alors :

(47) $I = i_{\infty}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-2jkl(n-1)} \times (i_n(l+z) + i_n(l-z))$

Les couples (V_n, i_n) correspondent aux ondes réfléchies de différents ordres et satisfont chacun à l'équation intégrale (48) :

(48) $\int_{-\infty}^{\infty} i_n(\zeta) d\zeta \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} d\varphi = 4\pi V_n e^{-jkz}$ pour $z > 0$ et $r = a$.

Le terme i_{∞} est le courant induit sur un conducteur infini et a été calculé au paragraphe précédent.

On obtient ainsi un ensemble infini d'équations. La première permet le calcul de $i_1(z)/V_1$, la seconde de $i_2(z)/V_2$, la n -ième de $i_n(z)/V_n$. Les facteurs de réflexion aux extrémités sont définis par la relation :

(49) $k_n = \frac{V_n}{V_{n-1}}$

et peuvent être déterminés en imposant que le courant soit nul aux extrémités du conducteur pour tous les ordres successifs de réflexion.

Faisant apparaître ces facteurs de réflexion, la solution de l'équation intégrale pour le rang n est la suivante :

(50) $i_n(z) = \frac{E_z^a}{j Z_c} \frac{\beta_0}{\beta_0^2 - k_z^2} k_1 k_2 k_n^{n-2} \psi_n(kz) e^{-jkz}$

La fonction ψ_n a été calculée par Hallèn [chap. 35 de la réf. 3]. La solution obtenue permet de constater qu'à partir de l'ordre 2, les fonctions ψ_n sont identiques. Les deux fonctions ψ_1 et ψ_{∞} à considérer se présentent sous forme d'une série infinie de termes. Dans la présente étude, compte tenu des valeurs de paramètres du problème, seul le premier terme des séries est significatif. Les fonctions ψ_1 et ψ_{∞} utilisées pour la suite du calcul sont les suivantes :

(51) $\psi_1(kz) \neq 1/\Omega'_z, \psi_{\infty}(kz) \neq 1/\Omega_z,$

avec :

(52) $\Omega_z = \log_e \frac{2z}{ka^2} - \gamma - j \frac{\pi}{2} + l(2kz),$

(53) $\Omega'_z = \log_e \frac{2z}{ka^2} - \gamma - j \frac{\pi}{2} + l(kz),$

(*) Y. ROBIN-JOUAN. Rapport PL 806068 sous contrat Aérospatiale n° 5306/3017, mai 1977.

$$(54) \quad I(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-j(\xi-x)}}{\xi} d\xi = -e^{+jx} \left(C_i(x) + j \left(\frac{\pi}{2} - S_i(x) \right) \right).$$

Ces deux fonctions sont continues au point $z = 0$.

$$(55) \quad \Omega_0 = -2 \log_e ak - 2 \gamma - j \pi,$$

$$(56) \quad \Omega'_0 = \log_e 2 - 2 \log_e ak - 2 \gamma - j \pi.$$

Le courant induit sur un conducteur infini peut se mettre sous la forme :

$$(57) \quad i_\infty(z) = -\frac{E_z^a}{j Z_c} \frac{\beta_0}{\beta_0^2 - k_z^2} = -\frac{E_z^a}{j k Z_c} \psi,$$

Exprimant les facteurs de réflexion à l'aide des fonctions ψ , il vient :

$$(58) \quad k_1 = \frac{\psi}{\psi_1(0)}, \quad k_n = \frac{\psi_{n-1}(2kl)}{\psi_n(0)}, \quad n > 1.$$

On en déduit l'expression du courant total :

$$(59) \quad I = -\frac{E_z^a}{j k Z_c} \left(\psi - \frac{\psi}{\psi_1(0)} e^{-jkl} (\psi_1(k(l+z)) \times e^{-jkz} + \psi_1(k(l-z)) e^{jkz}) + \frac{\psi}{\psi_1(0)} \frac{\psi_1(2kl)}{\psi_\infty(0)} \times e^{-3jkl} (\psi_\infty(k(l+z)) e^{-jkz} + \psi_\infty(k(l-z)) e^{jkz}) + \dots \right).$$

Les termes de la série forment une série géométrique de raison

$$-\frac{\psi_\infty(2kl)}{\psi_\infty(0)} e^{-2jkl}.$$

On obtient finalement :

$$(60) \quad I = -\frac{E_z^a}{j Z_c} \frac{\beta_0}{\beta_0^2 - k_z^2} \left(1 - \frac{1}{\psi_1(0)} \times e^{-jkl} (\psi_1(k(l+z)) e^{-jkz} + \psi_1(k(l-z)) e^{jkz}) + \frac{\psi_1(2kl) e^{-3jkl}}{\psi_1(0) (\psi_\infty(0) + \psi_\infty(2kl) e^{-2jkl})} \times (\psi_\infty(k(l+z)) e^{-jkz} + \psi_\infty(k(l-z)) e^{jkz}) \right).$$

5. MÉTHODE UTILISANT LES FACTEURS DE RÉFLEXION AU SENS DES LIGNES DE TRANSMISSION

5.1. Conducteur fini.

Il a été établi au paragraphe 2 que le champ diffracté par un conducteur parcouru par un courant de la forme $I = I_0 e^{-j\beta z}$ était donné par l'expression :

$$(61) \quad E_z^d = -(Z + \beta^2/Y) I.$$

Afin d'obtenir l'annulation de la composante tangentielle du champ sur le conducteur, on doit avoir :

$$(62) \quad E_z^a = Z I + \frac{\beta^2}{Y} I = Z I - Y^{-1} \frac{\partial^2 I}{\partial z^2}.$$

Le potentiel scalaire est par ailleurs lié au vecteur de Hertz par la relation :

$$V = -\nabla \cdot \vec{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

On en déduit :

$$(63) \quad V = j \frac{\omega \mu}{2 \pi k_1^2} \frac{\partial I}{\partial z} \log_e \frac{2h}{a} + j \frac{\omega \mu}{2 \pi} \frac{\partial I}{\partial z} J_c(\alpha) \neq -\frac{1}{Y} \frac{\partial I}{\partial z}.$$

Les équations type *ligne* correspondantes sont par conséquent :

$$(64) \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -Z I + E_z^a, \quad \frac{\partial I}{\partial z} = -Y V.$$

Il y correspond la solution :

$$(65) \quad I = \frac{1}{2 Z_c} \left(\int_0^z E_z^a(v) e^{\gamma v} dv + B \right) e^{-\gamma z} - \frac{1}{2 Z_c} \left(\int_z^l E_z^a(v) e^{-\gamma v} dv + D \right) e^{\gamma z}.$$

Les constantes B et D sont déterminées par les conditions aux limites.

5.2. Conducteur infini.

Considérons une source de tension $E_z^a(v) dv$ appliquée en un point v d'un conducteur infini. A chaque extrémité de ce générateur, l'impédance de charge est l'impédance caractéristique Z_c du conducteur. Par conséquent, la contribution de courant qui en résulte est :

$$dI(v) = \frac{E_z^a(v) dv}{2 Z_c},$$

A une distance $|z - v|$ de v , la contribution est :

$$dI(z) = \frac{E_z^a(v)}{2 Z_c} dv e^{-\gamma|z-v|}.$$

Le courant induit sur un conducteur infini est :

$$(66) \quad I(z) = -\frac{1}{2 Z_c} \int_{-\infty}^{+\infty} E_z^a(v) e^{-\gamma|z-v|} dv, \quad I(z) = -\frac{E_z^a}{Z_c} \frac{\gamma}{\gamma^2 + k_z^2}.$$

Ce résultat est identique à celui obtenu au paragraphe 3 en ayant $\gamma = \sqrt{ZY}$ et $Z_c = \sqrt{Z/Y}$.

6. REMARQUES SUR LA VALIDITÉ DES RÉSULTATS OBTENUS

Les deux développements asymptotiques utilisés pour le calcul de $J_c(\alpha)$ ne se raccordent pas parfaitement au voisinage de $|\alpha| = 1$. Si l'on désire examiner la réponse fréquentielle d'une antenne dans la plage de fréquences correspondante, il est utile d'effectuer une interpolation entre ceux-ci, afin de définir la valeur de $J_c(\alpha)$.

La composante tangentielle du champ électrique rayonné établie au paragraphe 2 comprend trois termes. Les deux premiers termes s'expriment à l'aide de fonctions de Bessel, le troisième est un terme intégral dont la valeur est $J_c(\alpha)$. Dans l'hypothèse où $|k_1 h| \gg 1$ (c'est le cas des fréquences hautes, $f > 10^6$ Hz pour $\sigma = 10^{-3}$ U/m et $\epsilon_r = 10$), il n'est plus légitime de remplacer chacun des deux premiers termes de l'expression de E_z^d par le premier terme du développement asymptotique. Cette procédure se justifie seulement pour le deuxième terme sachant que $k_1 a$ est très inférieur à 1. Tenant compte de la variation de la fonction de Bessel K_0 , le premier terme est négligeable. Il vient :

$$(67) \quad E_z^d = -\frac{j \omega \mu I}{2 \pi k_1^2} (k_1^2 - \beta^2) \times K_0(j k_1 (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \psi)^{1/2} a) - j \frac{\omega \mu}{2 \pi} I J_c(\alpha),$$

$$E_z^d \approx -\frac{j \omega \mu I}{2 \pi} \log_e \frac{2}{j k_1 (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \psi)^{1/2} a \gamma_1} - \frac{j \omega \mu}{2 \pi} I J_c(\alpha) - \frac{\beta^2}{j 2 \pi \omega \epsilon} \times \log_e \frac{2}{j k_1 (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \psi)^{1/2} a \gamma_1}.$$

En exprimant cette expression sous la forme :

$$E_z^d = -\left(Z + \frac{\beta^2}{Y}\right) I,$$

on obtient :

$$(68) \quad Z = \frac{j \omega \mu}{2 \pi} \log_e \frac{2}{j k_1 (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \psi)^{1/2} a \gamma_1} + \frac{j \omega \mu}{2 \pi} J_c(\alpha),$$

$$(69) \quad Y^{-1} = \frac{1}{j 2 \pi \omega \mu} \times \log_e \frac{2}{j k_1 (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \psi)^{1/2} a \gamma_1}.$$

La prise en compte de ces termes d'impédance et d'admittance pour les fréquences supérieures à 10^6 Hz permet d'obtenir des résultats en bonne concordance avec ceux de la méthode numérique pour les fréquences testées (10^7 Hz et 10^8 Hz).

7. SOLUTION DANS LE DOMAINE TEMPOREL

Le courant induit au point $z = 0$ sur un conducteur semi-infini s'obtient par transformation de Laplace de l'expression fréquentielle :

$$(70) \quad I(0) = \frac{E_z^a(z=0)}{(Z_c + Z_0) \gamma + j k_z},$$

$$\text{avec : } Z_c = \frac{1}{2 \pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \log_e \frac{2h}{a} \left(1 + \frac{2}{\alpha \log_e 2h/a}\right)^{1/2},$$

$$\gamma = j k_1 \left(1 + \frac{2}{\alpha \log_e 2h/a}\right)^{1/2},$$

et :

$$\frac{2}{\alpha} = \frac{2}{2 j k_2 h} = \frac{1}{j k_2 h} = \frac{1}{h \sqrt{\epsilon \mu} p},$$

en utilisant l'approximation hautes fréquences.

Pour $Z_0 = 0$, il vient :

$$I(\omega, 0) = \frac{E_z^a(z=0)}{60 \log_e 2h/a} \times \frac{1}{j k_1 \left(1 + \frac{2}{\alpha \log_e 2h/a}\right) + j k_z \left(1 + \frac{2}{\alpha \log_e 2h/a}\right)^{1/2}},$$

$$I(\omega, 0) = \frac{E_z^a(z=0)}{60 \log_e 2h/a} \times \frac{1}{j k_1 \left(1 + \sin \theta \cos \psi + \frac{(2 + \sin \theta \cos \psi)}{2 h p \sqrt{\mu \epsilon} \log_e 2h/a}\right)}.$$

On en déduit :

$$(71) \quad I(\omega, 0) = \frac{c E_z^a}{(60 \log_e 2h/a) p(b+a/p)} = \frac{c E_z^a}{(60 \log_e 2h/a) b p - a},$$

$$\text{avec : } b = 1 + \sin \theta \cos \psi \text{ et } a = \frac{2 + \sin \theta \cos \psi}{2 h \sqrt{\mu \epsilon} \log_e 2h/a}.$$

D'où l'expression temporelle correspondante :

$$(72) \quad I(t, 0) = \frac{c E_z^a(t)}{60 \log_e 2h/a b} \otimes e^{-(a/b)t} \approx \frac{c}{60 \log_e 2h/a} \int_0^t E_z^a(\tau) d\tau,$$

où \otimes désigne le produit de convolution.

L'expression de $I(\omega, 0)$ se simplifie en incidence normale pour laquelle $k_z = 0$. On obtient dans ce cas :

$$I = E_z^a / Z,$$

avec :

$$Z = -\frac{j \omega \mu}{2 \pi} \log_e \frac{2h}{a} - \frac{j \omega \mu}{2 \pi} J_c(\alpha).$$

On constate en traçant la courbe de l'impédance Z en fonction de la fréquence que l'on peut en faire une approximation par la fonction :

$$Z = \tau_1 p.$$

L'approximation HF est par conséquent extensible aux autres fréquences et la formule temporelle (72) s'applique quel que soit le signal incident.

8. RÉSULTATS

8.1. Domaine fréquentiel.

Deux types de courbes ont été tracées.

8.1.1. $I(\omega)$ à z donné.

La figure 1 correspond au cas d'une antenne de 6 000 m de longueur. Le courant est observé au centre

Ces résultats sont conformes à ceux publiés sur ce sujet [4] dans le cas d'un conducteur situé au voisinage d'un plan parfaitement conducteur.

8.1.2. $I(z)$ à ω donné.

Des simulations ont été effectuées pour plusieurs fréquences entre 10^2 Hz et 10^8 Hz et pour plusieurs valeurs du rapport l/λ . Pour $l \leq \lambda$ le courant sur le conducteur comprend une seule arche de sinus. Au-delà de cette valeur, le courant suit une récurrence proche de celle du champ.

Trois séries de résultats sont comparés :

— ceux utilisant les facteurs de réflexion introduits par Hallén (signe =) ;

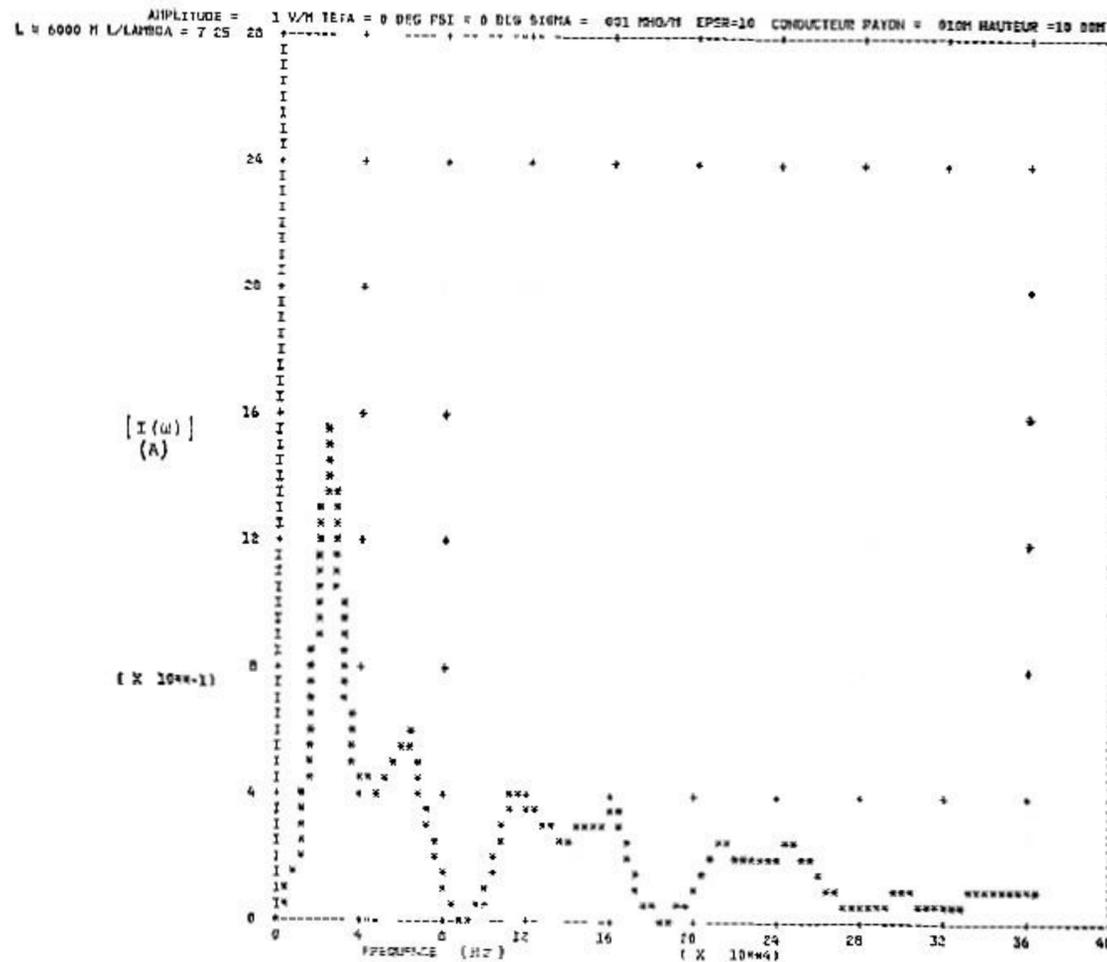


FIG. 1. — Courant induit au point milieu du conducteur en fonction de la fréquence.

Induced current at the middle of the wire versus frequency.

de celle-ci. On constate l'existence d'une alternance de résonances et d'anti-résonances situées aux points $f\theta = (2k + 1)/2$ pour les résonances et $f\theta = k$ pour les antirésonances, avec $\theta = l/c$. En exprimant la position de ces points par rapport à la longueur, il vient :

$$\text{pour les résonances } l = \frac{c}{f} \frac{2k + 1}{2} = \lambda \frac{2k + 1}{2},$$

$$\text{soit } l = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2}, \dots,$$

pour les antirésonances

$$l = \frac{c}{f} k = k\lambda,$$

$$\text{soit } l = \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots$$

— ceux utilisant les facteurs de réflexion de la méthode des lignes de transmission (signe *) ;

— ceux fournis par une méthode numérique (signe .).

Les résultats de la méthode numérique sont obtenus en calculant les intégrales de Sommerfeld suivant la méthode indiquée par Baños [6] (*).

Les résultats de simulation sont reportés aux figures 2 et 3 pour un signal incident à 10^5 Hz et des rapports l/λ égaux à 0,1 et 1. La figure 4 est le résultat d'une simulation à 10^8 Hz pour laquelle

(*) Cette méthode a été développée au LCT par M^{me} Louet.

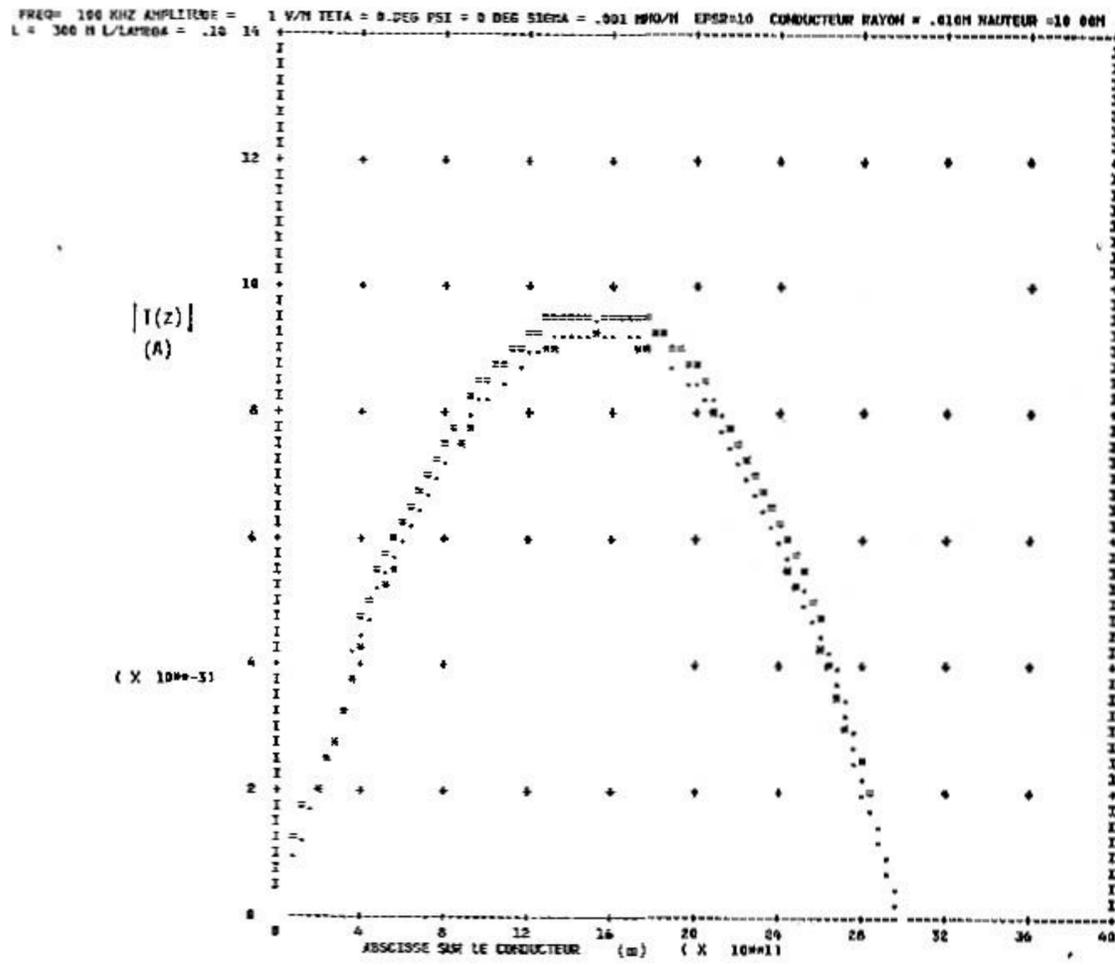


FIG. 2. — Courant induit en fonction de l'abscisse sur le conducteur.

Induced current versus position along the wire.

- • • Méthode numérique *Numerical method*
- = = = Méthode de Hallèn *Hallen method*
- * * * Méthode ligne de transmission *Transmission line method*

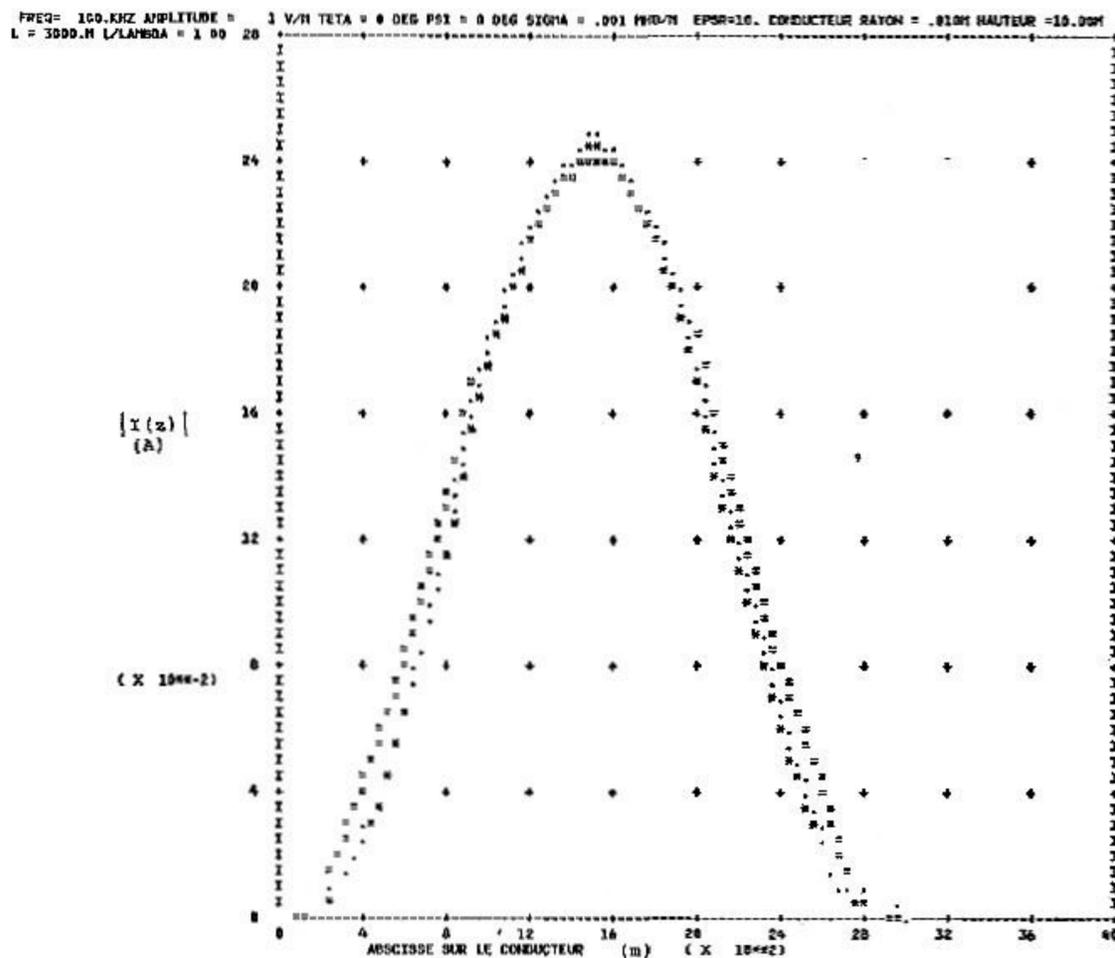


FIG. 3. — Courant induit en fonction de l'abscisse sur le conducteur.

Induced current versus position along the wire.

- • • Méthode numérique *Numerical method*
- = = = Méthode de Hallèn *Hallen method*
- * * * Méthode ligne de transmission *Transmission line method*

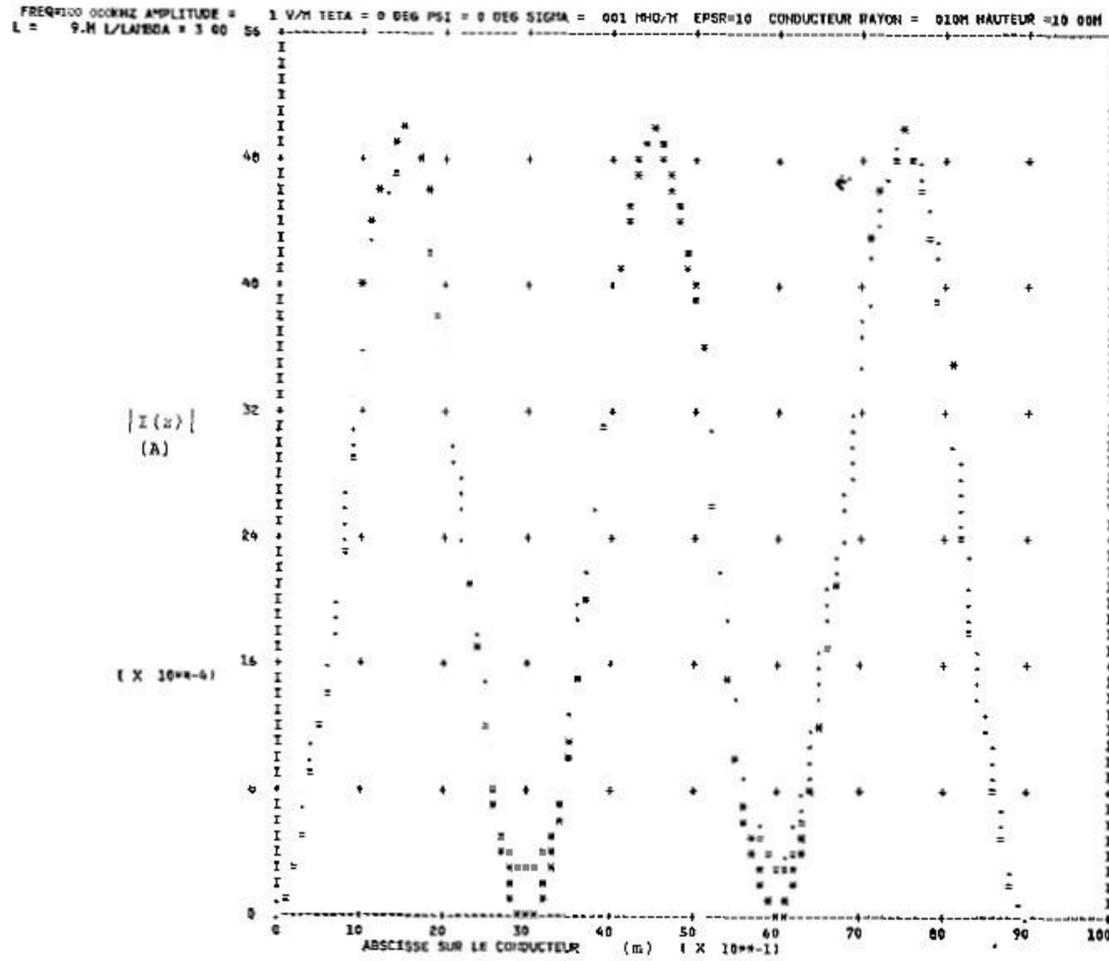


FIG. 4. — Courant induit en fonction de l'abscisse sur le conducteur.

Induced current versus position along the wire

- • • Méthode numérique *Numerical method*
- - - Méthode de Hallén *Hallén method*
- * * * Méthode ligne de transmission *Transmission line method*

les termes d'impédance et d'admittance pris en compte sont ceux définis au paragraphe 6.

King *et al.* [5] ont indiqué, en comparant des résultats de calcul et des résultats expérimentaux, que la méthode des facteurs de réflexion proposée par Hallén donnait d'excellents résultats pour $l/\lambda > 0,15$, ce qui se constate également d'après les calculs théoriques mais essentiellement aux basses fréquences. Cette limite peut être reculée aux hautes fréquences ainsi que le montre la figure 2.

Les comparaisons effectuées conduisent aux constatations suivantes :

— la méthode des facteurs de réflexion d'Hallén fournit d'excellents résultats (écarts inférieurs à quelques % par rapport à la méthode numérique) dès que $l/\lambda > 0,1$, à l'exception des fréquences de résonance. L'échec de la méthode aux fréquences de résonance est souligné par Hallén dans son ouvrage ;

— la méthode des lignes de transmission possède de substantiels avantages par rapport aux autres méthodes. Les résultats sont toujours proches de ceux fournis par la méthode numérique y compris dans les cas de résonance et pour des rapports l/λ faibles. Elle est par ailleurs facile à mettre en œuvre et permet de prendre en compte une impédance de charge quelconque.

8.2. Domaine temporel.

Les calculs effectués dans l'annexe I permettent de connaître la valeur de la composante tangentielle du champ électrique sur le conducteur. Les figures 5 et 6 représentent la variation du facteur de réflexion et de la composante tangentielle du champ pour différents angles d'incidence. Le conducteur étant situé à 10 m au-dessus du sol pour cette application, l'influence de l'onde réfléchie s'effectue avec un retard de 66 ns et conduit à une inversion du sens du champ.

La figure 7 indique la variation du courant sur un conducteur infini en fonction du temps.

9. CONCLUSION

La méthode proposée dans cet article fournit une solution satisfaisante pour le calcul du courant induit sur un conducteur situé au voisinage du sol dans les domaines fréquentiel et temporel. La façon de procéder présente de substantiels avantages par rapport à celle où les intégrales de Sommerfeld sont calculées pour chaque élément de courant sur l'antenne. Cette dernière procédure est onéreuse en temps calcul

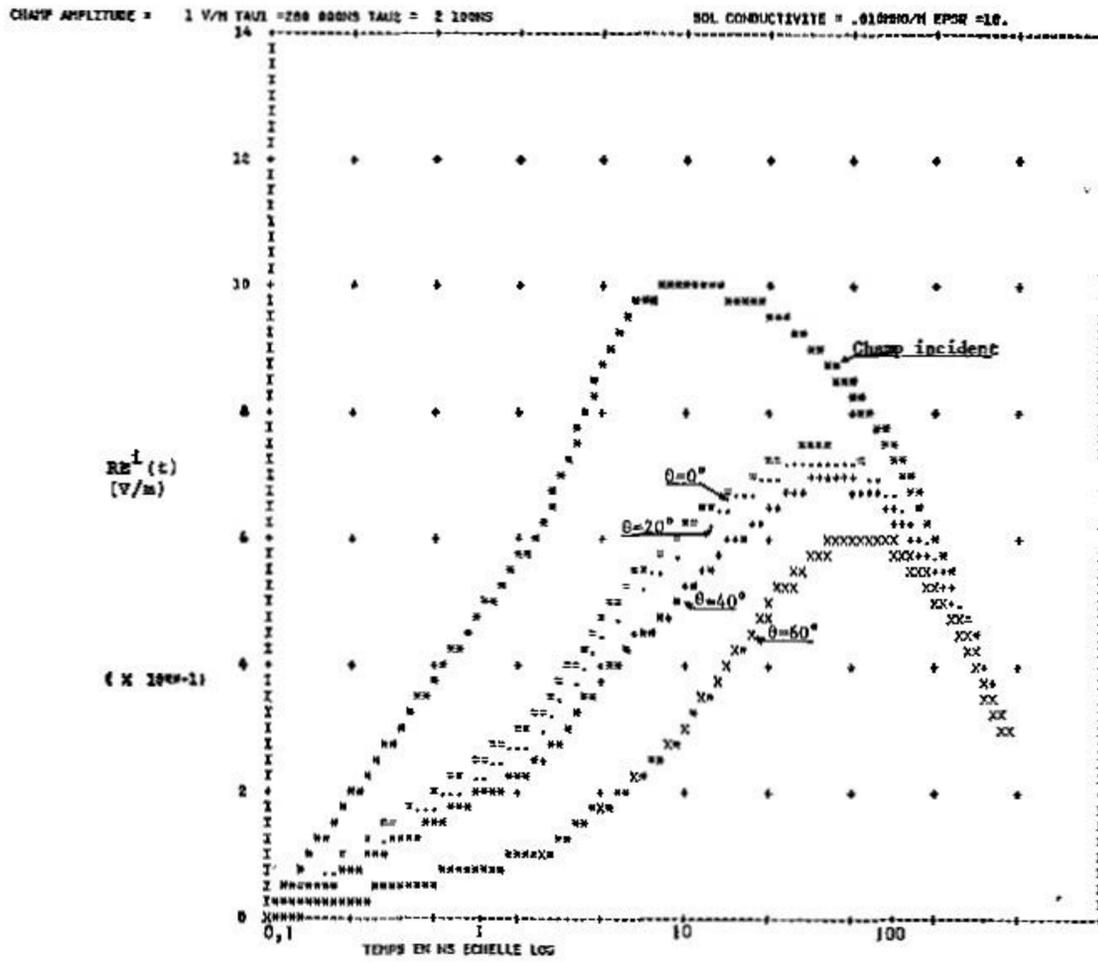


FIG. 5. — Amplitude de l'onde réfléchi en fonction du temps.
Amplitude of the reflected field versus time.

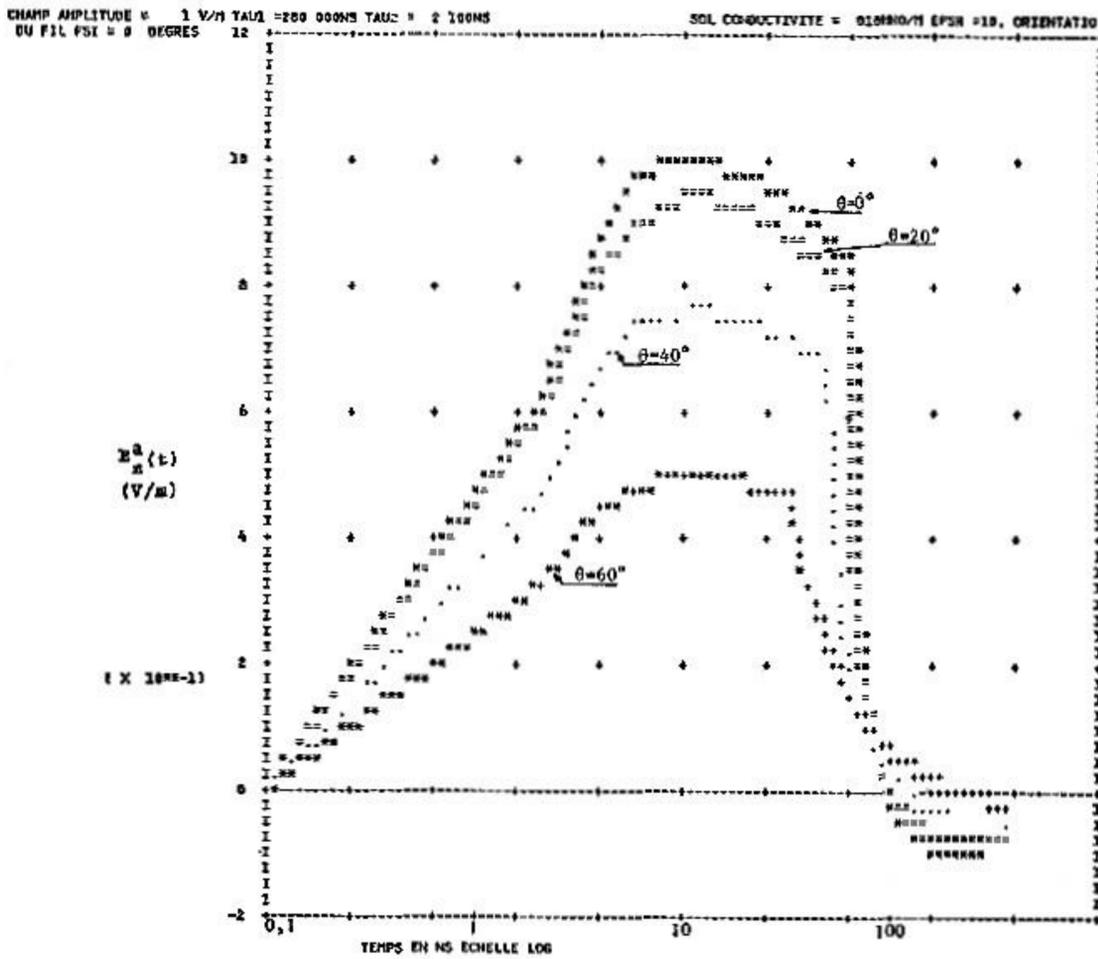


FIG. 6. — Composante tangentielle du champ ambiant sur le conducteur en fonction du temps.
Tangential component of the applied field on the wire versus time.

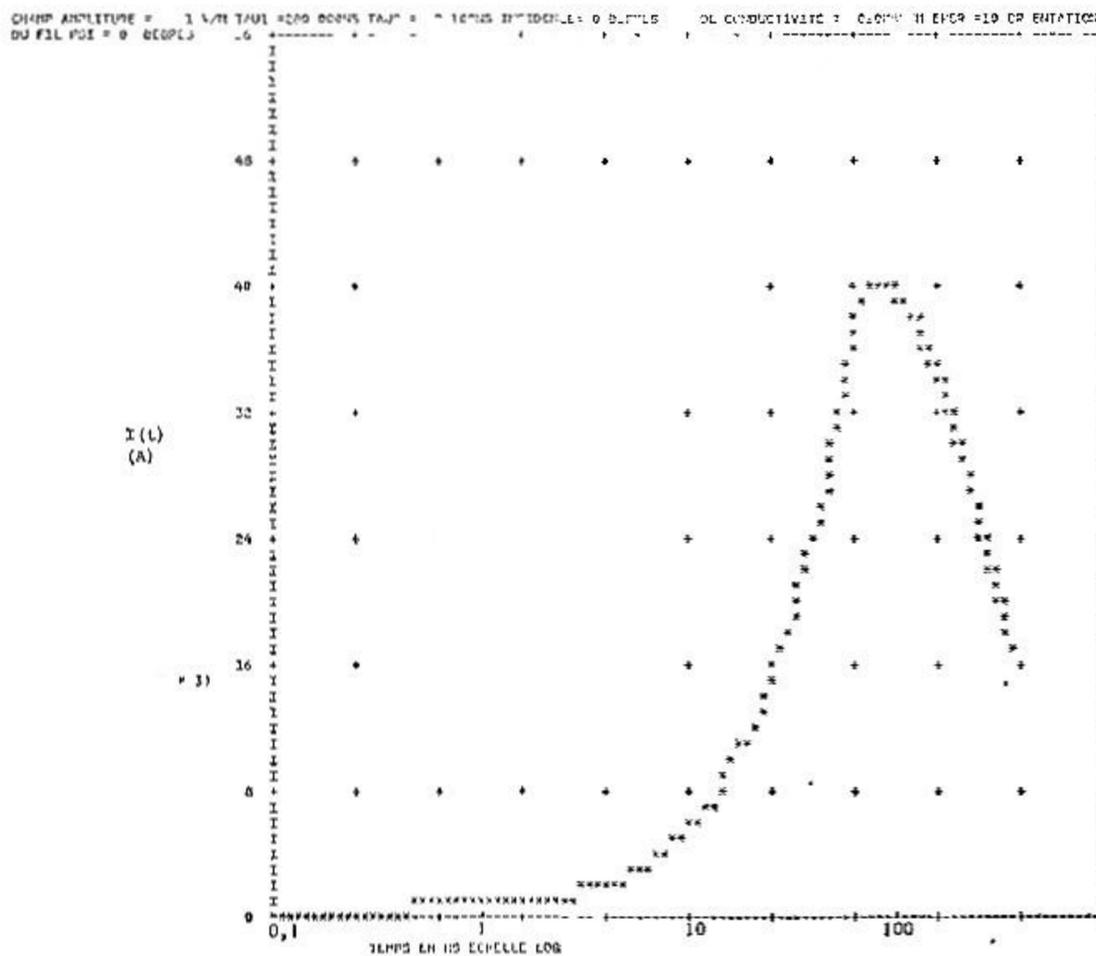


FIG. 7. — Courant induit sur un conducteur infini en fonction du temps.
Induced current on an infinite wire versus time.

et ne met pas en évidence les paramètres essentiels du problème. Par ailleurs, la méthode proposée dans cet article permet de prendre en compte des impédances de charge quelconques et d'atteindre analytiquement la solution dans le domaine temporel pour un conducteur infini.

Les calculs ont été effectués pour une onde incidente plane mais s'appliquent de la même façon si le champ incident est quelconque.

REMERCIEMENTS.

Je tiens à remercier tout particulièrement M. Robin-Jouan pour les fructueuses discussions que nous avons eues tout au long de cette étude. Je remercie également M. Molinet pour ses remarques et ses conseils.

ANNEXE I

Calcul des composantes tangentielles et normales du champ électrique compte tenu du sol et en l'absence du conducteur

1. Solution dans le domaine fréquentiel.

La source étant située à grande distance, l'onde incidente est supposée plane. Les calculs effectués

ci-après sont relatifs à un champ polarisé verticalement (vecteur \vec{E} dans le plan d'incidence).

Les vecteurs d'ondes \vec{k}_1 et \vec{k}_0 des ondes directes et réfléchies ont pour composantes :

$$\vec{k}_1 \begin{vmatrix} -\cos \theta \\ -\sin \theta \sin \psi \\ +\sin \theta \cos \psi \end{vmatrix} \quad \vec{k}_0 \begin{vmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \sin \psi \\ \sin \theta \cos \psi \end{vmatrix}$$

Les modules des vecteurs incident \vec{E} et réfléchi \overrightarrow{RE} sont par conséquent :

(A-1) $E = E^i \exp \left[j\omega \left(t - \frac{-x \cos \theta - y \sin \theta \sin \psi + z \sin \theta \cos \psi}{c} \right) \right]$

(A-2) $RE = RE^i \exp \left[j\omega \left(t - \frac{x \cos \theta - y \sin \theta \sin \psi + z \sin \theta \cos \psi}{c} \right) \right]$

On en déduit les composantes normale et tangentielle du champ ambiant dans le plan xOz

(A-3) $E_x^a = E^i \sin \theta e^{jkx \cos \theta} e^{-jkz \sin \theta \cos \psi} + RE^i \sin \theta e^{-jkx \cos \theta} e^{-jkz \sin \theta \cos \psi}$

(A-4) $E_x^a = E^i \sin \theta e^{-jkz \sin \theta \cos \psi} [e^{jkx \cos \theta} + Re^{-jkx \cos \theta}]$

(A-5) $E_z^a = E^i \cos \theta \cos \psi e^{jkx \cos \theta} e^{-jkz \sin \theta \cos \psi} - RE^i \cos \theta \cos \psi e^{-jkx \cos \theta} e^{-jkz \sin \theta \cos \psi}$

(A-6) $E_z^a = E^i \cos \theta \cos \psi e^{-jkz \sin \theta \cos \psi} (e^{jkx \cos \theta} - Re^{-jkx \cos \theta})$

L'expression de la composante tangentielle du champ dans le domaine temporel est de même :

$$(A-7) \quad E_z^a(h, z, t) = \cos \theta \cos \psi \left(E^1 \left(t - \frac{z \sin \theta \cos \psi}{c} \right) - RE^1 \left(t - \frac{2h \cos \theta}{c} - \frac{z \sin \theta \cos \psi}{c} \right) \right)$$

2. Solution dans le domaine temporel.

L'amplitude du champ réfléchi par le sol pour une onde de pulsation ω est le produit du coefficient de Fresnel par l'amplitude de l'onde incidente.

L'amplitude du signal temporel résultant de l'onde incidente peut s'obtenir par transformation de Fourier inverse :

$$(A-8) \quad RE^1(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty F(\omega) R(\omega) d\omega,$$

où $F(\omega)$ est l'expression fréquentielle du signal d'excitation. Le signal temporel possède un front de montée raide et un front de descente plus lent. Ce type de signal caractérise bien certains problèmes d'électromagnétisme. La formulation analytique $f(t)$ de ce signal est fournie par l'expression :

$$f(t) = e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2},$$

qui admet pour transformée de Fourier l'expression :

$$F(\omega) = \frac{1}{j\omega + 1/\tau_1} - \frac{1}{j\omega + 1/\tau_2} = F_1(\omega) - F_2(\omega),$$

et $R(\omega)$ est le coefficient de Fresnel.

$$(A-9) \quad R(\omega) = \frac{k_1^2 \cos \theta_0 - k_2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2 \sin^2 \theta_0}}{k_1^2 \cos \theta_0 + k_2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2 \sin^2 \theta_0}},$$

k_1 et k_2 sont les constantes de propagation des deux milieux :

$$k_1^2 = \omega^2 \mu \epsilon - j\mu \sigma \omega \quad k_2^2 = \omega^2 \mu \epsilon.$$

Posant a, b, α, β les constantes définies par les expressions suivantes :

$$(A-10) \quad a = \epsilon_r \cos \theta_0, \quad \alpha = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r},$$

$$b = \sqrt{\epsilon_r - \sin^2 \theta_0}, \quad \beta = \frac{\sigma}{\epsilon_0 (\epsilon_r - \sin^2 \theta_0)}.$$

L'expression de $R(\omega)$ peut s'écrire :

$$(A-11) \quad R(\omega) = \frac{a(p + \alpha) - b \sqrt{p(p + \beta)}}{a(p + \alpha) + b \sqrt{p(p + \beta)}}$$

$p = j\omega$ est la variable de Laplace.

En multipliant par la partie conjuguée du dénominateur, il vient :

$$(A-12) \quad R(\omega) = \frac{a^2 + b^2 (p + k) (p + l)}{a^2 - b^2 (p + d) (p + f)} - \frac{2ab}{a^2 - b^2} \frac{p(p + \alpha) (p + \beta)}{(p + d) (p + f)} \frac{1}{\sqrt{p(p + \beta)}}$$

(A-13)

$$F_1(\omega) R(\omega) = \frac{a^2 + b^2 (p + k) (p + l)}{a^2 - b^2 (p + d) (p + f) (p + \gamma_1)} - \frac{2ab}{a^2 - b^2} \frac{p(p + \alpha) (p + \beta)}{(p + d) (p + f) (p + \gamma_1)} \frac{1}{\sqrt{p(p + \beta)}}$$

L'originale de la fonction $F_1(\omega) R(\omega)$ s'obtient après décomposition en éléments simples :

(A-14) $F_1(\omega) R(\omega) =$

$$\frac{A}{p + d} + \frac{B}{p + f} + \frac{C}{p + \gamma_1} + \frac{1}{\sqrt{p(p + \beta)}} \times \left(\frac{-2ab}{a^2 - b^2} + \frac{E}{p + d} + \frac{F}{p + f} + \frac{G}{p + \gamma_1} \right)$$

Il vient :

$$(A-15) \quad F_1(t) R(t) = Ae^{-dt} + Be^{-ft} + Ce^{-\gamma_1 t} - \frac{2ab}{a^2 - b^2} e^{-\beta t/2} I_0 \left(\frac{\beta t}{2} \right) + E \int_0^t I_0 \left(\frac{\beta \tau}{2} \right) e^{-\beta \tau/2} e^{-d(t-\tau)} d\tau + F \int_0^t I_0 \left(\frac{\beta \tau}{2} \right) e^{-\beta \tau/2} e^{-f(t-\tau)} d\tau + G \int_0^t I_0 \left(\frac{\beta \tau}{2} \right) e^{-\beta \tau/2} e^{-\gamma_1(t-\tau)} d\tau,$$

I_0 est la fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre 0.

L'expression de $RE^1(t)$ est obtenue en appliquant la procédure décrite en (A-15) deux fois successives pour γ_1 et γ_2 et en soustrayant les résultats obtenus.

Une étude comparable a été effectuée par Dudley Papazoglou et White [7]. L'intérêt de la méthode décrite par rapport à la méthode proposée dans cet article est de fournir une expression analytique simple et facilement calculable sur ordinateur.

Manuscrit reçu le 3 octobre 1980, accepté le 22 septembre 1981.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] WAIT (J. R.). Theory of wave propagation along a thin wire parallel to an interface. *Radio Sci.*, USA (1972), 7, n° 6, pp. 675-679.
- [2] WATSON (G. N.). Theory of Bessel functions. *Cambridge University Press*, Cambridge, England, 2nd edition (1944).
- [3] HALLÉN (E.). Electromagnetic theory. *Chapman & Hall*, 1962.
- [4] UMASHANKAR (K. R.), SHUMPERT (T. H.), WILTON (D. R.). Scattering by a thin wire parallel to a ground plane using the singularity expansion method. *IEEE Trans. AP.*, USA (March 1975), 23, n° 2, pp. 178-199.
- [5] SHEN (L. C.), WU (T. T.), KING (R. W. P.). A simple formula of current in dipole antennas. *IEEE Trans. AP*, USA (1968), 16, n° 5, pp. 542-548.
- [6] BAÑOS (A.). Dipole radiation in the presence of a conducting half space. *Pergamon*, New York (1966).
- [7] DUDLEY (D. G.), PAPAZOGLU (T. M.), WHITE (R. C.). On the interaction of a transient electromagnetic plane wave and a lossy half space. *J. appl. Phys.*, USA (1974), 45, n° 3, pp. 1171-1175.
- [8] KING (R. W. P.). Electromagnetic waves and antennas above and below the surface of the earth. *Radio Sci.*, USA (1979), 14, n° 2, pp. 189-196.
- [9] CHANG (D. C.), OLSEN (R. C.). Excitation of an infinite antenna above a dissipative earth. *Radio Sci.*, USA (1975), 10, n° 8-9, pp. 823-38